



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:

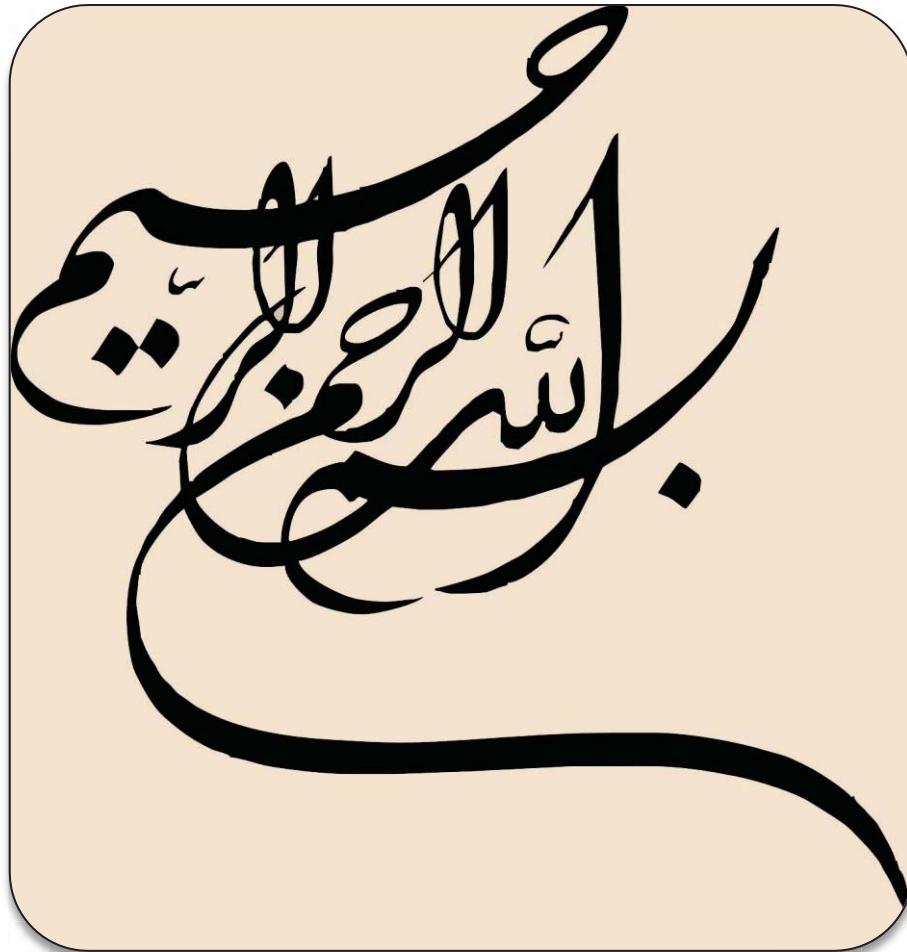


<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



صلفَر ڪا صد (يافعیات پاپ گنکور تجربی

درودی بحقیر کیا

Site: mkonkur.ir

ID: @jafarikia

امام علی(علیه السلام): عاقل‌ترین مردم کسی است که در امور زندگیش بهتر

برنامه‌ریزی کند و در اصلاح آخربخشی بیشتر همت نماید.

# فهرست مطالب

## فصل اول: آشنایی با ریاضیات پایه

صفحه ۱	بنایش اول: مجموعات
صفحه ۱۰	بنایش دوم: توان و ریشه‌ها
صفحه ۲۶	بنایش سوم: اثاکها و تجزیه پاند بجملات
صفحه ۴۸	بنایش پنجم: عبارت‌ها و گویا

## فصل دوم: معادلات، نامعادلات و تعیین علامت پاند بجملات

صفحه ۵۳	بنایش اول: معادلات درجه اول و درجه دوم
صفحه ۵۴	بنایش دوم: معادلات گویا، رادیکال‌ها و قدرمطلق‌ها
صفحه ۵۹	بنایش سوم: تعیین علامت و نامعادلات

## فصل سوم: دنباله‌ها

صفحه ۵۸	بنایش دنباله‌ها
---------	-----------------

## فصل چهارم: مثلثات

صفحه ۷۵	بنایش اول: مفاهیم پایه
صفحه ۸۱	بنایش دوم: نسبت‌های مثلثاتی زوایای طالع
صفحه ۹۵	بنایش سوم: رسم توایع مثلثاتی

## فصل پنجم: توایع

صفحه ۹۸	بنایش اول: مفهوم توایع و انواع آن
صفحه ۱۰۳	بنایش دوم: تابع یک به یک و وارون توایع
صفحه ۱۱۳	بنایش سوم: اعمال بر روای توایع
صفحه ۱۲۵	بنایش چهارم: توایع نمایی
صفحه ۱۴۹	بنایش پنجم: توایع لگاریتمی

## فصل ششم: حد و پیوستگی

صفحه ۱۶۴	بنایش اول: حد توایع
صفحه ۱۷۶	بنایش دوم: پیوستگی توایع

## فصل هفتم: آمار و احتمال

صفحه ۱۸۳	بنایش اول: آمار
صفحه ۱۹۳	بنایش دوم: آنالیز ترکیبی و احتمال

## فصل هشتم: هندسه

صفحه ۲۲۹	بنایش اول: هندسه تایلاین
صفحه ۲۳۸	بنایش دوم: ترسیم‌های هندسه
صفحه ۲۴۵	بنایش سوم: استدلل هندسه و قضییه‌های تالس
صفحه ۲۵۲	بنایش چهارم: تشابیه مثلثها



تعريف (مجموعه): به دسته‌ای از اشیا مشخص و دو به دو متمایز، مجموعه گفته می‌شود. مجموعه‌ها با حروف بزرگ نامگذاری می‌شوند.

نکته: مجموعه  $A$  زیر مجموعه مجموعه  $B$  است هرگاه:  $a \in A \Rightarrow a \in B$ . در این صورت می‌نویسیم:  $A \subseteq B$ .

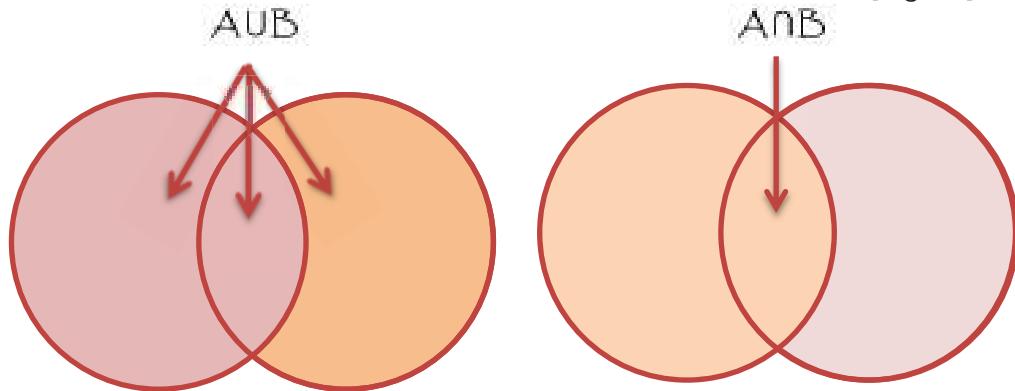
نکته: هر مجموعه  $n$  عضوی  $2^n$  زیر مجموعه دارد.

مثال: مجموعه  $\emptyset$  عضوی  $B$ ، چند برابر مجموعه  $A$  عضوی  $B$  زیر مجموعه دارد؟

### اعمال روی مجموعه‌ها:

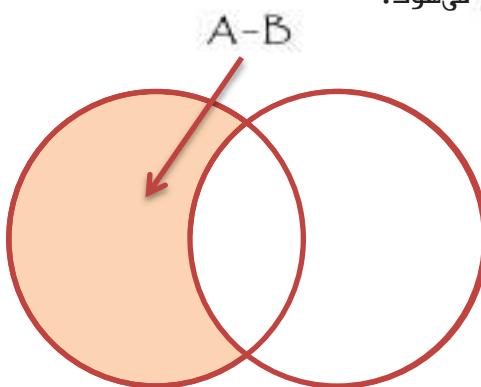
۱) اجتماع: اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  که با  $A \cup B$  نشان داده می‌شود، از همه اعضای این دو مجموعه تشکیل شده است.

۲) اشتراک: اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$  که با  $A \cap B$  نشان داده می‌شود، فقط از اعضای مشترک این دو مجموعه می‌شود.



نکته: اگر اشتراک دو مجموعه‌تی باشد، دو مجموعه از هم جدا یا مجزا نامیده می‌شوند.

۳) تفاضل: تفاضل مجموعه  $A$  از مجموعه  $B$  که با  $A - B$  نشان داده می‌شود، شامل همه اعضای  $A$  بجز اشتراک  $A$  و  $B$  می‌شود.



تست: اگر  $n(A \cup B) = 22$  و  $n(B) = 9$ ،  $n(A - B)$  کدام است؟

۲۲ (۱)

۲۰ (۴)

۲۳ (۲)

۲۵ (۳)

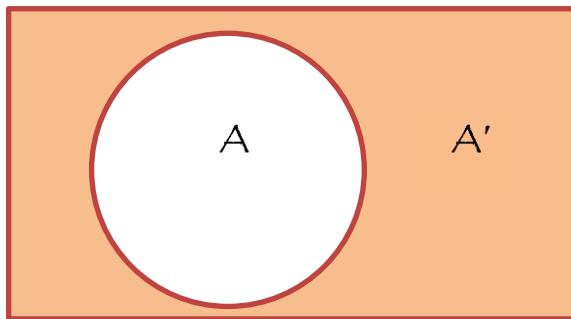


دانلود از سایت ریاضی سرا



تعريف (مجموعه مرجع): در هر مبحث مجموعه‌ی را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند، مجموعه مرجع مینامیم و آن را با  $\mathcal{U}$  نشان می‌دهیم.

تعريف (متتم مجموعه): هرگاه  $A \subseteq \mathcal{U}$  مجموعه مرجع باشد و  $A'$  آنگاه مجموعه مراجعاً را متتم مینامیم و آن را با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم. بعبارت دیگر  $A'$  شامل عضوهایی از  $\mathcal{U}$  است که در  $A$  نیستند.



نکته: در حالت کلی داریم:

- ۱)  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
- ۲)  $A \cap B = B \cap A$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ,  $A \cap \mathcal{U} = A$
- ۳)  $A - B \neq B - A$ ,  $A - \emptyset = A$ ,  $A - A = \emptyset$
- ۴)  $(A')' = A$ ,  $A \cup A' = \mathcal{U}$ ,  $A \cap A' = \emptyset$ ,  $A - A' = A$
- ۵)  $A \subseteq B \Rightarrow$ 
  - a)  $B' \subseteq A'$
  - b)  $A \cap B = A$
  - c)  $A \cup B = B$

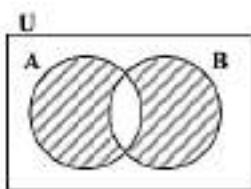
$$A \cup A' = \emptyset \quad (\text{F})$$

$$(A')' = A \quad (\text{T})$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (\text{T})$$

$$A \cap A' = \emptyset \quad (\text{T})$$

تست ۱: اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند، کدام گزینه تادرست است؟



تست ۲: با توجه به شکل، متهم قسمت هاشورخورده کدام است؟

$$\mathcal{U} - (A \cap B) \quad (\text{F})$$

$$\mathcal{U} - (A \cup B) \quad (\text{T})$$

$$(A \cup B) - (A \cap B) \quad (\text{T})$$

$$(A \cup B)' \cup (A \cap B) \quad (\text{F})$$

تست ۳: با توجه به شکل، متهم قسمت هاشورخورده کدام است؟



تست ۴: دو مجموعه  $A$  و  $B$  را در اختیار داریم. با کم کردن  $B$  از  $A$  در  $A$  تغییری ایجاد نمی‌شود. در این صورت اشتراک  $B$  و متتم  $A$  کدام است؟

$$\emptyset \quad (\text{F})$$

$$B' \quad (\text{T})$$

$$A' \quad (\text{F})$$

تست ۴: دو مجموعه  $A$  و  $B$  را در اختیار داریم. با کم کردن  $B$  از  $A$  در  $A$  تغییری ایجاد نمی‌شود. در این صورت اشتراک  $B$  و متتم  $A$  کدام است؟



تست: )) امام علی(ع): علم و دانش، بنیاد و ریشه‌ی همه‌ی خوبی‌ها و ندانی ریشه و اساس همه‌ی بدی‌ها است. ))  
 مجموعه‌های  $A = \{1, 2, 5\}$  و  $B = \{1, 2, 5, 7\}$  را درنظر می‌گیرید، اگر داشته باشیم  
 $C = \{1, 2, 5\}$  ، آنگاه مقدار  $a$  کدام است؟  $A - (B \cap C) = \{2, 7\}$

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



تست: اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

$$A \cup B = U \quad (\text{۴})$$

$$(A \cap B)' = U \quad (۰)$$

$$(A \cup B)' = \emptyset \quad (\text{۵})$$

$$A - B = \emptyset \quad (\text{۷})$$



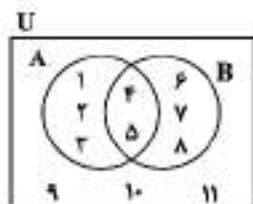
تست: اگر  $A \neq B$  و  $A \subseteq B$  باشد، آنگاه کدام گزاره نادرست است؟

$$A' \cup B = U \quad (\text{۴})$$

$$B' \subseteq A' \quad (۱)$$

$$A' \cap B = \emptyset \quad (\text{۵})$$

$$A \cap B' = \emptyset \quad (\text{۷})$$



تست: در نمودار ون مقابل، اعضای هر مجموعه درون آن نوشته شده است. مجموعه  $A - B'$  کدام است؟

{1, 2, 7} (۰)

{1, 2, 3, 4, 5} (۱)

{2, 5} (۲)

{4, 5, 6, 7, 8} (۴)



نکته: در حالت کلی داریم:



۱)  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  ،  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۲)  $A - (A - B) = A \cap B$  ،  $B - (B - A) = A \cap B$

تست: متمم مجموعه‌ی  $(A - (A - B)) \cup (A \cap B)'$  کدام است؟

{۱} (۴)

 $A' \cup B' \quad (\text{۵})$  $B' \quad (\text{۶})$ 

A (۱)



دانلود از سایت ریاضی سرا



تعريف: تعداد اعضای مجموعه  $A$  را با  $n(A)$  نشان می‌دهیم.

تعريف(مجموعه‌ی متناهی): مجموعه  $A$  متناهی است هر گاه  $n(A)$  مشخص باشد.

نکته: اگر  $B$  یک مجموعه متناهی باشد و داشته باشیم  $A \subseteq B$ ، آنگاه مجموعه  $A$  نیز متناهی است.

نکته: اگر  $A$  یک مجموعه نامتناهی باشد و داشته باشیم  $B \subseteq A$ ، آنگاه مجموعه  $B$  نیز نامتناهی است.

مثال: اگر  $N \subseteq A$ ، مجموعه  $A$  نامتناهی است.

$$U - B' \quad (4)$$

۱

$$A \cap B \quad (3)$$

۲

$$A - B \quad (2)$$

۳

$$B - A \quad (1)$$



- تست ۱۰:** اگر  $A$  نامتناهی و  $B$  متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟ ( $U$  مجموعه مرجع است)
- (۱)  $B$  یک مجموعه متناهی است.
  - (۲)  $A$  یک مجموعه متناهی است.
  - (۳)  $B - A$  یک مجموعه متناهی است.
  - (۴) ممکن است  $B$  یک مجموعه متناهی باشد.

$$A' \cup B \quad (4)$$

$$A \cup B \quad (3)$$

$$B' \cap A \quad (2)$$

$$A - B \quad (1)$$



$$A - B \quad , \quad B - A \quad , \quad A \cup B \quad , \quad A \cap B$$

۱ (۲)

۴ (۴)

۱ (۱)

۴ (۳)

**تست ۱۲:**

اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای متناهی باشند، چه تعداد از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

- (۱) اشتراک دو مجموعه متناهی، همواره تهی است.
- (۲) تفاضل دو مجموعه متناهی، همواره متناهی است.
- (۳) اجتماع دو مجموعه متناهی، همواره نامتناهی است.



۱

۲

۳

**تست ۱۴:**

کدام گزینه درست است؟

- (۱) تفاضل دو مجموعه نامتناهی، همواره متناهی است.
- (۲) اشتراک دو مجموعه متناهی، همواره نامتناهی است.
- (۳) اجتماع دو مجموعه متناهی، همواره متناهی است.



(( عمر آنقدر کوتاه است که نهی از دم آدم حقیر و کوچک بداند. ))



نکته: در حالت کلی برای دو مجموعه  $A$  و  $B$  داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

نکته: اگر دو مجموعه  $A$  و  $B$  مجزا باشند، آنگاه:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0$$

نکته: اگر دو مجموعه  $A$  و  $B$  مجزا باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \overbrace{n(A \cap B)}^{=0} \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

**مثال:** در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانشآموزان این

کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند؟



**مثال ۲:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $n(U) = 100$

مطلوب است:  $n(A \cap B) = 40$  و  $n(B) = 90$ ،  $n(A) = 60$



- (الف)  $n(A \cup B)$       (ب)  $n(A \cap B')$       (پ)  $n(A' \cap B)$       (ت)  $n(A' \cap B')$

**تست ۱:** اگر  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $n(A \cap B) = 20$ ،  $n(B) = 40$ ،  $n(A) = 40$ ،  $n(U) = 100$  و  $n(A \cup B) = 60$  کدام است؟

$n(A' \cap B')$

۲۰ (۱)



۶۰ (۴)

۴۰ (۳)

۳۰ (۲)

**تست ۲:** اگر  $n(A - B) = ۲۲$  و  $n(A \cup B) = ۴۴$  و  $n(U) = ۷۰$ ،  $n(B') = ۲۲$ ،  $n(A) = ۱۵$  کدام است؟

۱۲ (۱)



۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۷ (۲)

**تست ۱۷:** اگر  $n(A \cap B) = ۲۲$  و  $n(B - A) = ۲۲$  ،  $n(A - B) = ۱۵$  ،  $n(U) = ۵۱$  کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۷ (۳)

۱۰ (۲)

۱۲ (۱)



**تست ۱۸:** در کدام گزینه، دو مجموعه مجزا نیستند؟  
 $U - \emptyset$  و  $\emptyset - U$  (۴)       $(A \cup B)'$  و  $(A \cap B)'$  (۳)       $A - B$  و  $B - A$  (۲)       $A \cup A'$  و  $A' \cap A$  (۱)



**تست ۱۹:** در یک کلاس ۳۰ نفری، اگر ۶ نفر در برنامه‌های پژوهشی و ۴ نفر هم در هر دو نوع برناسه‌ی پژوهشی و

پژوهشی شرکت کرده باشند و ۷ نفر در هیچ کدام از برنامه‌ها شرکت نکرده باشند، چند نفر فقط در برنامه‌های پژوهشی شرکت کردند؟

۱۵ (۴)

۱۰ (۲)

۱۷ (۳)

۱۱ (۱)



**تست ۲۰:** کلاسی ۲۸ دانش آموز دارد. ۸ نفر اصلاً ورزش نمی‌کنند. تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند، سه

برابر تعداد افرادی هستند که فقط والبیال بازی می‌کنند و تعداد تمام افرادی که فوتبال بازی می‌کنند، پنج  
برابر تعداد افرادی هستند که فقط والبیال بازی می‌کنند. در این کلاس چند نفر هم فوتبال و هم والبیال  
بازی می‌کنند؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۲)

۱۰ (۳)

۴ (۱)



**تست ۲۱:** یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ فیلم پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. تعداد کل فیلم‌هایی که غیرپویانمایی و غیرطنز هستند، کدام است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)



**تست ۲۲:** در یک پرسش و پاسخ پیرامون علاقمندی به رشته تجربی و ریاضی از میان ۱۶۰ نفر، ۸۰ نفر اعلام کردند که به هر دو رشته ریاضی و تجربی علاقمند هستند. ۱۵ نفر علاقمندی خود را فقط به رشته ریاضی اعلام کردند، ۲۰ نفر هم گفتند به هیچ کدام از این دو رشته علاقه ندارند. چند نفر به رشته تجربی علاقمند هستند؟

۱۲۵ (۴)

۳۵ (۳)

۸۰ (۲)

۴۵ (۱)



(()) یادداشت هدف‌هایتان بر روی کاغذ، احتمال دستیابی به آن‌ها را ۱۰۰٪ افزایش می‌دهد.

- اگر در یک کلاس ۴۰ نفره، ۳۰ نفر به والیبال و ۱۵ نفر به بسکتبال علاقه‌مند باشند و ۳ نفر به هیچ‌کدام از این دو رشته علاقه‌مند نباشند، چند نفر در این کلاس به هر دو رشته علاقه‌مند هستند؟

۷ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

تست: ۲۲



### چند مجموعه خاص:



۱. مجموعه اعداد طبیعی: این مجموعه را با حرف  $\mathbb{N}$  نشان می‌دهیم و داریم:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

نکته: مجموعه  $\mathbb{W} = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$  مجموعه اعداد حسابی نامیده می‌شود.

۲. مجموعه اعداد صحیح: این مجموعه را با حرف  $\mathbb{Z}$  نشان می‌دهیم و داریم:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

۳. مجموعه اعداد گویا: چون این مجموعه ناشمارا است پس نمی‌توان این مجموعه را به صورت دو مجموعه فوق نوشت. تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

نکته: بین هر دو عدد گویا بینهایت عدد گویای دیگر وجود دارد.

تست: ۲۴: اگر  $\mathbb{N}$  مجموعه مرجع،  $A$  مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۴ و  $B$  مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۸۰ باشد، کدام مجموعه متناهی است؟

 $B \cup A'$  (۴) $A \cap B$  (۳) $A \cup B$  (۲) $A \cap B'$  (۱)

تست: ۲۵: - کدام مجموعه متناهی است؟

(۱) مجموعه اعداد طبیعی فرد

(۲) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰



(۳) مجموعه اعداد اول یک رقمی

(۴) بازه  $(0, 1)$

تست: ۲۶:

اگر  $A = \{n \in X \mid 0 < n < 10\}$  یک مجموعه متناهی باشد، مجموعه  $X$  مجموعه‌ی ... می‌باشد.

 $Q'$  (۴) $Z$  (۳) $Q$  (۲) $R$  (۱)

تکنام گزاره زیر درست است؟

(۱) اگر  $A \subseteq B$  و مجموعه  $B$  نامتناهی باشد، مجموعه  $A$  حتماً نامتناهی است.



(۲) اگر  $A \subseteq B$  و مجموعه  $A$  نامتناهی باشد، مجموعه  $B$  ممکن‌باشد نامتناهی باشد.

(۳) مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی عدد  $n$ ، نامتناهی است.

(۴) اگر  $A$  مجموعه اعداد صحیح و  $B$  مجموعه اعداد حسابی باشد،  $A - B = B - A$  متناهی است.

تست: ۲۷:



دانلود از سایت ریاضی سرا

(( با ارزش‌ترین سرهایه شما خودتان هستید، برای بالا بدن ارزش خود تهادی آموزش‌های لازم را فرا بگیرید. ))



۴. مجموعه اعداد اصم (گنگ): اعدادی که گویا نباشد (یعنی دارای بسط اعشاری مشخصی نباشند) اصم یا گنگ نامیده می‌شوند. این اعداد با نماد  $\mathbb{Q}'$  و یا  $\mathbb{Q}^c$  نشان داده می‌شوند. نظیر: اعداد  $\sqrt{2}$  و  $\pi$ .

**تست ۲۸:**

(۴) هر سه گزینه

(۳)  $0/29231\dots$

(۲)  $0/1444\dots$

(۱)  $0/2525\dots$



**تست ۲۹:**

کدام گزینه درست نیست؟

(۱) هر عدد طبیعی، یک عدد حسابی است.

(۲) هر عدد صحیح، یک عدد گویا است.

(۳) عددی حسابی وجود دارد که عدد صحیح نیست.

(۴) عدد گنگی وجود ندارد که بتوان آن را به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت.



اعداد حقیقی: از اجتماع اعداد گویا و گنگ بدست می‌آید. یعنی داریم:



نکته: زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی را می‌توانیم به صورت بازه‌ای از اعداد نشان دهیم.

نکته: تعریف می‌کنیم:

$$1) [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$



$$2) [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$



$$3) (a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$



$$4) (a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$



$$5) (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$



$$6) (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$$



**تست ۳۰:**

اجتماع و اشتراک دو بازه  $[-1, 4]$  و  $(2, +\infty)$  به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه آمده است؟

(۱)  $(-1, +\infty)$  و  $[-1, 2]$  (۲)  $(-1, 2)$  و  $(2, 4)$  (۳)  $(-1, +\infty)$  و  $(2, 4)$  (۴)  $(-1, +\infty)$  و  $[-1, 4]$



دانلود از سایت ریاضی سرا

$A' \cap B$  (۴)تست ۳۱: اگر  $A = (-5, -1]$  و  $B = [-2, 2]$ : آن‌گاه عدد ۲ عضو کدام‌یک از مجموعه‌های زیر است؟ $A \cup B$  (۳) $A' - B$  (۲) $A - B$  (۱) $b > c$   $d > a$  (۴)تست ۳۲: دو بازه باز  $(a, b)$  و  $(c, d)$  را در نظر بگیرید. با کدام شرط  $A \cap B = (c, d)$  غیرتهی است؟ $b > c$  و  $d > a$  (۳) $b > c$  (۲) $d > a$  (۱)

تست ۳۳: کدام بازه شامل تعداد بیشتری از اعداد طبیعی است؟

 $[1, 2) \cap (1, 5)$  (۲) $[-2, 5) \cap (2, 5)$  (۱) $(1, 6) \cap [1, 7)$  (۴) $[1, 6] - [2, 3]$  (۳)

تست ۳۴: کدام یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ی نامتناهی است؟

- ۱) مجموعه‌ی تمام درخت‌های یک جنگل  
 ۲) مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی موجود در  $(-\infty, 1] \cap [1, +\infty)$

- ۱) مجموعه‌ی خلوط گذرنده از مبدأ مختصات  
 ۲) مجموعه‌ی اعداد صحیح موجود در بازه‌ی  $(1, +\infty)$

**توان اعداد:** تعداد مرتبطی که عدد در خودش ضرب می‌شود را توان آن عدد می‌گوییم. در مورد اعداد تواندار قوانین زیر برقرار است.



$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad a^m \div a^n = a^{m-n}, \quad a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a^0 = 1$$

$$\text{EX)} \quad \frac{2^5^2 \times 2^{-3} \times 1^6}{2^9 \times 2^0 \times 2^4} = \frac{2^2 \times 2^{-3} \times 2^4}{2^9 \times 2^4 \times 2^3} = \frac{2^2 \times 2}{2^9}$$

$$x = \lambda y \quad (1)$$

$$y = \lambda x \quad (2) \quad x = 2y \quad (3) \quad y = 2x \quad (4)$$

تست



تست ۲: حاصل  $\frac{4}{3} \times 9^{\frac{1}{3}} \times 27^{-1}$  کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$9 \quad (4)$$



**نکته:** اگر اعداد حقیقی را توسط اعداد  $-1$  و  $0$  به چهار دسته تقسیم کنیم، داریم:

(الف) اعداد بزرگتر از یک ( $x > 1$ ) هر چه به توان بیشتری برسند، بزرگتر می‌شوند.

$$\text{EX)} \quad (2/5)^3 > (2/5)^2, \quad 2^4 > 2^2$$

(ب) اعداد بین صفر و یک ( $0 < x < 1$ ) هر چه به توان بیشتری برسند، کوچکتر می‌شوند.

$$\text{EX)} \quad (0/2)^4 < (0/2)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

(ب) اعداد بین منفی یک و صفر ( $-1 < x < 0$ ) هر چه به توان فرد بیشتری برسند، بزرگتر می‌شوند.

$$\text{EX)} \quad (-2/5)^3 < (-2/5)^5, \quad \left(-\frac{1}{5}\right)^4 > \left(-\frac{1}{5}\right)^3$$

(الف) اعداد کوچکتر از منفی یک ( $x < -1$ ) هر چه به توان فرد بیشتری برسند، کوچکتر می‌شوند.

$$\text{EX)} \quad (-3)^3 > (-3)^5, \quad (-5)^9 < (-5)^7$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۳:** کدام گزینه نادرست است؟

$$(\pi - 3)^{3+} > (\pi - 3)^{2+} \quad (4) \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\Delta} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\gamma} \quad (3) \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2+} > (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{3+} \quad (2) \quad (2 - \sqrt{5})^{1+} > (2 - \sqrt{5})^{1\Delta} \quad (1)$$



- کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

$$\sqrt[3]{0.1 \cdot 0.3} > (0.1 \cdot 0.3)^{\frac{3}{2}} \quad (4) \quad \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5} \quad (3) \quad \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^2} \quad (2) \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[4]{2} \quad (1)$$



**تست ۴:** اگر  $a < 0$  باشد، فاصله کدام عدد از صفر کوچک‌تر است؟

$$\sqrt[3]{a} \quad (5) \quad a\sqrt[3]{a} \quad (6) \quad \frac{1}{a} \quad (7) \quad a^2\sqrt{a} \quad (8)$$



**ریشمگیری:** عکس عمل توان رساندن ریشمگیری نام دارد و در حالت کلی اگر داشته باشیم  $a = b^n$ ، آنگاه  $\sqrt[n]{a} = b$  ریشه  $n$  ام عدد  $a$  نامیده می‌شود و می‌نویسیم:

**مثال:** ریشه‌های دوم عدد  $4$  برابر  $\pm 2$ ، ریشه‌های چهارم عدد  $16$  برابر  $\pm 2$  و ریشه‌ی سوم عدد  $27$  برابر  $3$  است.

**نکته:** اعداد منفی ریشه زوج ندارند و در حالت کلی داریم:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n = 2k \\ a & n = 2k+1 \end{cases}, \quad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$\text{EX)} \quad \sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = +5 \quad \sqrt[4]{-16} = \text{x} \quad , \quad \sqrt[4]{-8} = -2 \quad , \quad \sqrt[3]{32} = 2$$

**نکته:** روابط زیر در صورت منفی نبودن عبارت با ریشه زوج، برقرار هستند:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{ab} \quad , \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad , \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad , \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$$

$$\text{EX)} \quad 2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{4 \cdot 5} \quad , \quad \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \times 5^1} = \sqrt[3]{20}$$

**تست ۵:**

- تساوی  $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$  بهایی چه مقداری از  $a$  و  $n$  برقرار نیست؟

فرد  $n \cdot a < 0$  (۴)

فرد  $n \cdot a > 0$  (۳)

زوج  $n \cdot a < 0$  (۲)

زوج  $n \cdot a > 0$  (۱)



دانلود از سایت ریاضی سرا

(( امام علی (ع): علم، گنج بزرگی است که با خرج کردن تمام نهی شود. ))

تست ۷: حاصل عبارت  $A = \sqrt[3]{x} \sqrt[5]{x^2}$  بهزایی کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



$$\sqrt[3]{+/-27} = \sqrt[3]{+/-81}$$

(الف)  $\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$

چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست هستند؟

تست ۸



$$(\sqrt{-2})^4 = \sqrt[4]{(-2)^4}$$

(ب)  $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-9} \times \sqrt[3]{(-2)^4} = 9$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\frac{\sqrt[5]{x^5} \times \sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[3]{x^3}}$$

کدام است؟

-۱ (۴)

x (۳)

-x (۲)

۱ (۱)

تست ۹



$$\sqrt[3]{r^{x+5}} \times \sqrt[5]{r^{y+2}} = r^{x+1}$$

اگر x + y باشد، حاصل

کدام است؟

تست ۱۰



۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



۶ (۴)

۲\sqrt{9}

حاصل عبارت  $\sqrt[4]{12} \times \sqrt[5]{54} \times \sqrt[3]{24}$ . کدام است؟۱)  $\sqrt[3]{2}$ 

تست ۱۱



۲\sqrt{3}

۱+\sqrt{3}

۲ (۲)

۱)  $\sqrt{3}$ 

تست ۱۲

حاصل عبارت  $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2+\sqrt{2}}) \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ . کدام است؟

۲\sqrt{9}

۱)  $\sqrt{3}$ 

اگر m و n دو عدد صحیح متوالی باشند که در رابطه  $m < \sqrt[3]{25} < n$  صدق می‌کنند،  $m^2 - n^2$  کدام است؟

تست ۱۳



-۷ (۴)

-۵ (۳)

-۴ (۲)

-۳ (۱)

دانلود از سایت ریاضی سرا

**مسئلہ ۱۴:** حاصل  $\sqrt{5} - (1 - \sqrt{5})^2$  برابر است با:

$1 + \sqrt{5}$  (۱)

$\pm(1 - \sqrt{5})$  (۲)

$\sqrt{5} - 1$  (۳)

$1 - \sqrt{5}$  (۴)



**مسئلہ ۱۵:** اگر  $a < b < c$  باشد، حاصل کدام است؟

$2b$  (۱)

$-2a$  (۲)

$2a$  (۳)

$-2b$  (۴)



**مسئلہ ۱۶:** حاصل  $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{2-\sqrt{3}}$  کدام است؟

$4$  (۱)

$3$  (۲)

$2$  (۳)

$1$  (۴)



**مسئلہ ۱۷:** حاصل  $\sqrt[6]{(\sqrt{2}+1)^6} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^5}$  کدام است؟

$\sqrt[6]{2}$  (۱)

$\sqrt[5]{2}$  (۲)

$1$  (۳)

$2$  (۴)



**مسئلہ ۱۸:** حاصل  $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{3} + 1$  کدام است؟

$\sqrt{3}-1$  (۱)

$3$  (۲)

$2\sqrt{3}-1$  (۳)

$1$  (۴)



**نکته:** در حالت کلی برای هر عدد حقیقی نظیر  $x$  و اعداد طبیعی  $n$  و  $m$  داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} x > 1 \xrightarrow{n>m} \sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x} < x \\ \quad \exists x) \quad \sqrt[4]{2} < \sqrt[3]{2} < 2 \Rightarrow \end{array} \right.$$

هر چه ریشه بزرگتر، عدد کوچکتر

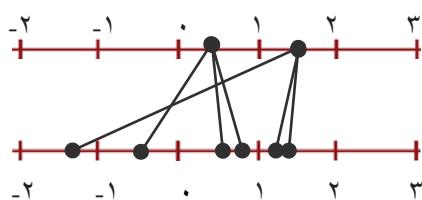
$$\left\{ \begin{array}{l} x < 1 \xrightarrow{n>m} \sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x} > x \\ \quad \exists x) \quad \sqrt[4]{\frac{1}{2}} > \sqrt[3]{\frac{1}{2}} > \sqrt[2]{\frac{1}{2}} \Rightarrow \end{array} \right.$$

هر چه ریشه بزرگتر، عدد بزرگتر

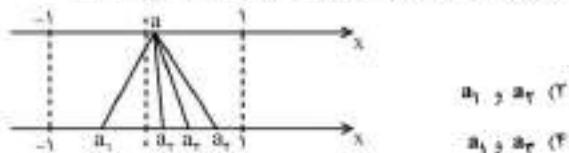
دانلود از سایت ریاضی سرا

((پایه اکرم(ص): هر که در جستجوی داش باشد، بهشت در جستجوی او براشد. ))

نقاط پایین که مربوط به ریشه‌های دوم و ریشه سوم نقاط بالا هستند را مشخص کنید.



در شکل زیر، نقطه‌ی  $a$  از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. کدام نقطه



ریشه‌ی چهارم نقطه‌ی  $a$  است؟

- $a_1$  و  $a_2$  (۱)  
 $a_1$  و  $a_3$  (۲)  
 $a_2$  و  $a_3$  (۳)

- (۱) فقط  $a_1$   
(۲) فقط  $a_2$   
(۳) فقط  $a_3$

اگر  $1 < a < 0$  باشد، ریشه‌ی پنجم از ریشه‌ی ششم ... است و اگر  $a > 1$  باشد، ریشه‌ی چهارم از

ریشه‌ی پنجم ... است.

- (۱) بزرگتر - بزرگتر (۲) بزرگتر - کوچکتر (۳) کوچکتر - بزرگتر (۴) کوچکتر - کوچکتر

تست ۲۱: اگر  $1 < a < 0$  باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

- (۴) صفر

- (۳)  $\sqrt[2]{a}$

- (۲)  $\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$

- (۱)  $\sqrt[2]{\sqrt{a}}$

تست ۲۲: اگر  $1 < b < 0$  باشد، بین ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم  $b$  کدام رابطه می‌تواند برقرار باشد؟

- (۱) ریشه سوم  $b >$  ریشه پنجم  $b >$  ریشه چهارم  
(۲) ریشه پنجم  $b >$  ریشه سوم  $b >$  ریشه چهارم  
(۳) ریشه چهارم  $b >$  ریشه سوم  $b >$  ریشه پنجم

نکته: در حالت کلی برای هر عدد حقیقی نظیر  $x$  و اعداد طبیعی  $n$  و  $m$  فرد باشند، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < x < 0 \xrightarrow{n>m} \sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x} \\ x < -1 \xrightarrow{n>m} \sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{EX)} \quad \sqrt[3]{-8/2} < \sqrt[2]{-8/2} \\ \text{EX)} \quad \sqrt[2]{-2} > \sqrt[3]{-2} \end{array}$$

هر چه ریشه بزرگتر، عدد کوچکتر

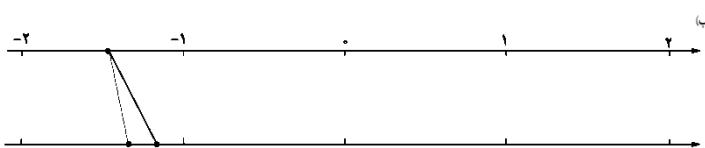
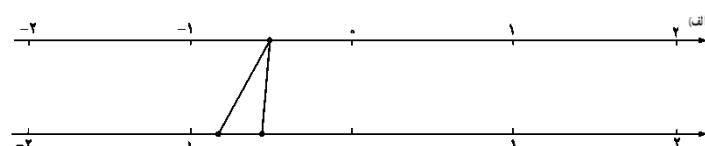
هر چه ریشه بزرگتر، عدد بزرگتر



دانلود از سایت ریاضی سرا

((پیامبر اکرم(ص): پرسش نیمی از دانش است. ))

**مثال ۲:** در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر پاره خط



مربوط به کدام ریشه است.



**مسئلہ ۲۳:**

اگر  $-1 < a < 0$ ، کدام عدد زیر از بقیه بزرگ‌تر است؟

$$-a^{\frac{1}{3}}$$

$$a^{\frac{1}{3}}$$

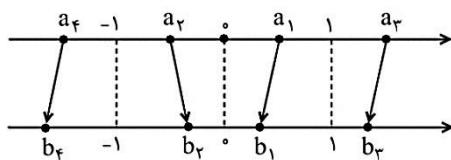
$$a$$

$$\sqrt[3]{a}$$



**مسئلہ ۲۴:**

در شکل زیر، هر یک از اعداد روی محور بالا به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه‌ی سوم آن است، وصل شده است. چند تا از پیکان‌ها نادرست است؟



- (۱) دو تا  
(۲) چهار تا

- (۳) یکی  
(۴) سه تا



الف) مهمترین اتحادهای جبری:۱. مربع دو جمله‌ای:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$\text{EX)} \quad (ax + b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2, \quad (a - bx)^2 = a^2 - 2abx + b^2x^2$$

۲. مربع سه جمله‌ای:

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

$$\text{EX)} \quad (x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$$

۳. مکعب دو جمله‌ای:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$\text{EX)} \quad (2x - 1)^3 = 8x^3 - 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 - 1^3$$

$$= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

به کمک اتحادها حاصل را بیابید.

$$(2x+5)^2 = , \quad (3x-1)^2 =$$

$$(2-x+y)^2 = , \quad (2x+y-1)^2 =$$

$$(x+5)^3 = , \quad (3x-1)^3 =$$

$$(995)^3 = , \quad (1000-5)^3 =$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

((اهم‌العلی)) (ع): آفت مهندسیت، تبلیغ است.

**تسنیه:** حاصل عبارت  $30^2 - 29 \times 31$  با استفاده از اتحادها کدام است؟

۱۲۴

۲۳۰

۱۲۱

۱۱۱



**تسنیه:** عدد  $133^2 - 100^2 - 22^2$  چند برابر ۱۳۳ است؟

۹۹۰۰ (۱)

۹۹۰۰ (۲)

۹۹۰ (۳)

۹۹۰ (۴)



ادامه مهمترین اتحادهای جبری:

۵. مزدوج:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$\text{EX)} \quad \left(\frac{x}{a} - y^2\right)\left(\frac{x}{a} + y^2\right) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - y^4$$

۶. یک جمله مشترک:

$$(x+A)(x+B) = x^2 + (A+B)x + AB$$

$$\text{EX)} \quad (ax - c)(ax + c) = a^2x^2 - c^2$$

۷. مجموع و تفاضل مکعبات(چاق و لاغر):

$$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$

$$(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

$$\text{EX)} \quad (2x - a)(9x^2 + 6ax + a^2) = 18x^3 - 12a^2$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

(()) مشکلات در زندگی به دو دلیل ایجاد می‌شوند: عمل هیکنیم بدون آنکه در هورد آن، فکر کنید، یا فکر هیکنیم بدون آنکه به آن فکر، عمل کنیم. (( ))

به کمک اتحادها حاصل را بیابید.



$$(4x - 1)(4x + 1) = , (2 - x)(2 + x)(4 + x^2)(16 - x^2) =$$

$$(2x - 1)(2x + 5) = , (x + 5)(x - 9) =$$

$$(3x + 2)(3x - 5) = , (1 - x)(1 + x + x^2) =$$

$$(x + 6)(x^2 - 6x + 36) = , 106 \times 94 =$$

ساده شده‌ی عبارت زیر در کدام گزینه آمده است؟



$$\Delta = (2a - 2)(2a + 2)(18a^2 + 24a^2 + 1)$$

$$18a^2 - 24a^2$$

$$+ 24a^2 - 2$$

$$18a^2 - 22a$$

$$+ 24a^2 - 2$$

حاصل عبارت  $(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})(\sqrt{7} + 2\sqrt{2})^{100}$  برابر است با:

$$\sqrt{7} + 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} - \sqrt{7}$$



مقدار عددی عبارت  $A = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) \dots (2^{100} + 1)$  برابر است با:



$$2^{100} - 1$$

$$2^{100} - 1$$

$$2^{100} + 1$$

$$2^{100} + 1$$



حاصل عبارت  $(x - a)(x + a)(x' + a' + ax)(x' + a' - ax)$  همواره، برابر است با:



$$x' + 2a' x' - a'$$

(۱) صفر

$$x' - a'$$

$$x' - 2a' x' + 2a' x - a'$$

**تست ۷:** حاصل عبارت  $A = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) + \frac{1}{9}$  بهزای  $x=1$  کدام است؟

$\frac{1015}{9} (۴)$

$1015 (۳)$

$\frac{1016}{9} (۲)$

$1016 (۱)$



**تست ۸:**  $\sqrt{2x+4} + \sqrt{2x-1}$  ، حاصل  $\sqrt{2x+4} - \sqrt{2x-1} = 2$  - اگر کدام است؟

$\frac{7}{2} (۴)$

$\frac{5}{2} (۳)$

$2 (۲)$

$\frac{3}{2} (۱)$



$11\sqrt{2} + 8 (۵)$

$11\sqrt{2} (۴)$

$9\sqrt{2} (۳)$

$4\sqrt{2} + 8 (۱)$



**تست ۹:** حاصل عبارت  $A = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) + 25$  برابر با مربع کدام گزینه است؟

$x^2 + x - 7 (۲)$

$x^2 - x - 7 (۱)$

$x^2 - x - 5 (۴)$

$x^2 + x - 5 (۳)$



**تست ۱۰:** اگر  $\alpha, \beta$  باشند، حاصل  $\beta = \sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}$  و  $\alpha = \sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}$  کدام است؟

$7\sqrt{2} (۴)$

$6\sqrt{2} (۳)$

$8 (۲)$

$6 (۱)$



**تست ۱۲:** حاصل عبارت  $x = \sqrt[7]{x-1}(x+1)(x^7+x^7+1)(x^{17}+x^9+1)$  به ازای  $x$  کدام است؟

۱۶ (۲)

۶۳ (۱)

۱۵ (۴)

۲۲ (۰)



۸ (۴)

۱۰ (۳)

-۸ (۲)

-۱۰ (۱)



**تست ۱۳:** اگر  $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$  کدام است؟

۱۰ (۳)

-۱۰ (۱)



**چند اتحاد مهم دیگر:**



$$a^r + b^r = \underbrace{(a+b)}_s^r - \cancel{ab} \quad , \quad a^r + b^r = \underbrace{(a+b)}_s^r - \cancel{ab} \underbrace{(a+b)}_s$$

EX)  $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=4 \end{cases} \Rightarrow x^4 + y^4 = ? \quad , \quad x^4 + y^4 = ?$

i)  $x^4 + y^4 = (-4)^4 - 4(4) = 256$

ii)  $x^4 + y^4 = -4^4 - 4(4)(-4) = -4^4 + 32 = -48$

**تست ۱۴:** اگر  $x + \frac{1}{x^2} = 2$  باشد، حاصل  $x + \frac{1}{x} = 2$  برابر است با:

۲ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

**تست ها:** اگر  $xy = 4$  و  $x+y = 5$  باشد، حاصل  $x^3 + y^3$  کدام است؟

۲۶۴ (۴)

۲۴۴ (۳)

۲۲۸ (۲)

۲۱۶ (۱)

**تست ۱۶:** اگر  $x + y = 5$  و  $xy = 1$  باشد،  $x^7 + y^7$  چقدر است؟

۱۴۰ (۴)

۱۳۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۱۰ (۱)



نکته: اگر  $a + b + c = 0$  باشد، انگاه داریم:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

**تست ۱۷:** حاصل عبارت  $(2 - \sqrt{2})^3 + (-3 - \sqrt{2})^3 + (2\sqrt{2})^3$  کدام است؟

-۴۲\sqrt{2} (۴)

۲۶\sqrt{2} (۳)

-۳۶\sqrt{2} (۲)

-۶\sqrt{2} (۱)



ب) تجزیه چند جمله‌های:

انواع روش‌های تجزیه چندجمله‌های به ترتیب زیراند:

ا. فاکتور گیری: در مورد عباراتی که دارای یک عبارت مشترک در تمام جملات هستند، بکار می‌روند.

نکته: در برخی عبارات، ابتدا به دستگیری و سپس فاکتور گیری می‌پردازیم.

**مثال ۳:** تجزیه کنید.

$$4xy - 1 \cdot x^4 = , 3ax^3 + 6x^2 =$$



$$9(x-1) - x^2(x-1) =$$

$$ax - 3b + 3a - bx =$$

**تست ۱۸:** در تجزیه عبارت  $x^3 - 2xy + x^2y - 2y^3$  کدام عامل وجود دارد؟

2x+y^2 (۴)

x^2 - 2y (۳)

x-y (۲)

x^2 + 2y (۱)



۵. استفاده از اتحادها: اگر عبارتی با روش‌های فوق تجزیه نشود از اتحادها استفاده می‌کنیم.



الف) دو جمله‌ای باشد: برای توان‌های دو و سه معمولاً از اتحادهای مزدوج و مجموع و تفاضل مکعبات استفاده می‌کنیم.

$$\text{EX)} \quad x^4 - 81 = (x - 3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27), \quad 27x^3 - 1 = (3x - 1)(3x^2 + 3x + 1)$$

**مثال ۴:** عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$1 - 81x^4 =$$

$$, 81 - x^4 =$$

$$x^3 + 27 =$$

$$, x^6 - 125 =$$

$$x^6 - 1 = (x+1)$$

$$, x^6 - 27 =$$

$$x^5 - 32 =$$

$$, \frac{x^3 + 1}{x^5 + 1} =$$

$$\text{مسئله ۱۹: } A = \frac{99^3 - 1}{99^2 + 100} \times \frac{99^3 + 1}{99^2 - 98} \text{ مقدار } A \text{ کدام است؟}$$

۹۸۳ (۴)

۹۹۳ (۳)

۹۸۰۰ (۲)

۹۹۰۰ (۱)



**مسئله ۲۰:** در تجزیه عبارت  $2a^7b - 12ab^7 + a^7 - Ab^7$  کدام عامل ضرب وجود دارد؟

a + 7b (۲)

a - 7b (۱)

7a - b (۴)

7a + 7b (۳)



**مسئله ۲۱:** در تجزیه‌ی عبارت  $x^6 - 2x^3 + 8x - 24$ ، همواره کدام عامل ضرب وجود دارد؟

x + 3 (۴)

x + 2 (۳)

x - 2 (۲)

x - 4 (۱)



تست ۲۲: در تجزیه عبارت  $\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{x^4} + 1$  کدام عبارت وجود ندارد؟

$$\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{x^4} + 1 \quad (\text{۲})$$

$$\sqrt[5]{x^4} - 1 \quad (\text{۱})$$



$$\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^4} + 1 \quad (\text{۴})$$

$$\sqrt[5]{x^4} + 1 \quad (\text{۳})$$



تست ۲۳: در تجزیه‌ی  $x^4 + 6x^3 + 9$  کدام عامل وجود دارد؟

$$x^3 - 3 \quad (\text{۲})$$

$$x^3 + 3 \quad (\text{۱})$$



$$x^3 + 3x + 3 \quad (\text{۴})$$

$$x^3 + 3x + 3 \quad (\text{۳})$$



ب) سه جمله‌ای باشد: از اتحاد های مریع دو جمله‌ای و یا یک جمله مشترک استفاده می‌کنیم.



$$\exists X) \quad x^2 + 7x + 6 = (x + 2)^2, x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$$

نکته (تبديل عبارت به مریع کامل): داریم:

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad , x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

نکته: در مورد عباراتی که در آنها ضریب جمله  $x^2$  غیر از یک باشد، می‌توان تجزیه با استفاده از اتحاد یک

جمله مشترک را به صورت زیر انجام داد:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + m)(ax + n), \quad \begin{cases} m + n = b \\ m \times n = ac \end{cases}$$

عملیات: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 + 4x + 4 =$$

$$, x^2 - 6x + 9 =$$

$$4x^2 - 12x + 9 =$$

$$, x^2 + 7x - 6 =$$

$$x^2 + 14x - 15 =$$

$$, x^2 - 5x - 36 =$$

$$3x^2 - x - 2 =$$

$$, 2x^2 + 5x - 7 =$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

((اگر از کاری که انجام هی دهد خرسند و راضی باشد، حتیا موفق خواهد شد.))

**مثال:** از طریق مربع کامل کردن، تجزیه کنید.

$$x^2 + 4x + 3 = , \quad x^2 - 6x =$$



**مسئلہ ۲۴:**

اگر  $a+b$  آن گاه  $ab - 2a + 6 - 2b = 0$  کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

**مسئلہ ۲۵:**

اگر  $(c+d)^2$  مقدار  $d^2 - c^2 = 77$  و  $c-d = -7$  کدام است؟

۱۴۴ (۶)

۱۲۱ (۳)

۸۱ (۲)

۶۴ (۰)

**مسئلہ ۲۶:**

حاصل عبارت  $\left(\frac{50}{99} + \frac{1}{99}\right)^2 - \left(\frac{49}{99} + \frac{1}{99}\right)^2$  برابر است با:

۴) هیچکدام

۲ (۳)

-۱/۹۹ (۲)

-۱/۹۹ (۱)

**مسئلہ ۲۷:**

در تجزیه عبارت  $y^5 + 2y^3 - 24y$  کدام عامل وجود ندارد؟

$y-4$  (۱)

$y+2$  (۳)

$y-2$  (۲)

$y^2+2$  (۰)



**مسئلہ ۲۸:**

ساده شده عبارت مقابل کدام است؟

$$A = \frac{xy^2 + y^2 + y + 1 - x}{y^2 + y + 1}$$

((اهم علی)) هرگاه از کاری ترسیدی، خود را به کام آن بیندار، زیرا ترس شدید از آن کار، دشوارتر و زیانبارتر از اقدام به آن کار است. (۱۰)

**تست ۳۹:** اگر  $x^7 + y^7 - 2x - 2y + 2 = 0$  باشد، کدام رابطه درست است؟

$$x^7 + y^7 = x + y \quad (۲)$$

$$x^7 + y^7 = 1 \quad (۱)$$

$$x^7 + y^7 = 2x + 2y + 2 \quad (۴)$$

$$x^7 + y^7 = - \quad (۳)$$

**تست ۴۰:** تجزیه شده عبارت  $x^7 - y^7 - 4 + 4y$  کدام است؟

$$(x - y + 1)(x - y + 7) \quad (۱) \quad (x + y - 1)(x - y + 7) \quad (۲) \quad (x - y - 1)(x - y + 7) \quad (۳) \quad (x + y - 1)(x - y - 7) \quad (۴)$$

**تست ۴۱:** در تجزیه‌ی عبارت  $1 + x^7 + x^7$  کدام عامل وجود دارد؟

$$x^7 + x - 1 \quad (۲)$$

$$x^7 - x + 1 \quad (۱)$$

$$x^7 + x \quad (۴)$$

$$x^7 + 1 \quad (۳)$$

**تست ۴۲:** اگر حاصل عبارت  $\frac{2-\sqrt{3}}{2}(\frac{2+\sqrt{3}}{2})^{\frac{3}{2}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}}$  باشد، A کدام است؟

$$\sqrt{3} + 1 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} - 1 \quad (۱)$$

**تست ۴۳:** کدام یک از گزینه‌های زیر ریشه‌ی دوم عدد  $11 - 4\sqrt{7}$  است؟

$$2 - \sqrt{7} \quad (۴)$$

$$\sqrt{7} - 4 \quad (۳)$$

$$1 - \sqrt{7} \quad (۲)$$

$$4 - 2\sqrt{7} \quad (۱)$$



**تست ۴۴:** مقدار عددی عبارت  $A = \sqrt[3]{(x - \sqrt{8})^2} - 2\sqrt{2 - 2\sqrt{2}}$  کدام است؟

$$\pi(1 - \sqrt{2}) \quad (۴)$$

$$2 + \sqrt{2} \quad (۳)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$0 \quad (۱)$$



**تست ۳۵:** اگر  $x = \sqrt{x^2 + y^2 + \sqrt{4x^2y^2}}$  کدام است؟

(۱)  $-x - y$    (۲)  $x + y$    (۳)  $y - x$    (۴)  $x - y$



نکته: برای تجزیه عبارت‌های زیر داریم:

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

**تست ۳۶:** عبارت  $x^3 - 3x^2 + 3x - 3\sqrt{3}$  به ازای  $x = \sqrt{3} + 1$  برابر است با:

(۱)  $1 + \sqrt{3}$    (۲)  $1 + 3\sqrt{3}$    (۳)  $3\sqrt{3} - 1$    (۴)  $\sqrt{3} - 1$

(ریاضی آزاد ۷۰)

**تست ۳۷:** حاصل عبارت  $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$  به ازای  $x = 2 + \sqrt{2}$  کدام است؟

(۱)  $8 + \sqrt{2}$    (۲)  $8 - \sqrt{2}$

(۳)  $11$    (۴)  $8 + 2\sqrt{2}$

**تست ۳۸:** به ازای کدامیک از اعداد زیر، رابطه  $x^3 + 3x^2 + 3x = 1$  برقرار است؟

(۱)  $\sqrt[3]{2} - 1$    (۲)  $\sqrt[3]{2} + 1$    (۳)  $-\sqrt[3]{2} - 1$    (۴)  $-\sqrt[3]{2} + 1$





پ) ک.م.م چند جمله‌های:

ک.م.م دو عبارت را بعد از تجزیه آنها به ترتیب زیر می‌یابیم:

ک.م.م: حاصل ضرب عوامل مشترک با توان بیشتر در عوامل غیر مشترک.

**مسئله ۳۹:**

$$\text{کوچکترین مفرب عامل مشترک دو عبارت } x^2 - x' - x + 1 \text{ و } x^2 + x' - x - 1 \text{ است:}$$

$$(x+1)^2(x-1) \neq 0$$

$$(x'-1)(x'+1) \neq 0$$

$$(x-1)^2(x+1) = 0$$

**مسئله ۴۰:**

بزرگترین عامل مشترک دو عبارت  $x^2 + 7xy + 12y^2$  و  $x^2 - 2xy - 15y^2$  کدام است؟

$$x+7y \quad (\neq) \quad x+4y \quad (\neq) \quad x+3y \quad (\neq) \quad x-2y \quad (0)$$

عبارات گویا: این عبارات به صورت کسری هستند که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای است.

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \text{ریشه‌های مخرج کسر} \right\}$$

نکته: دامنه عبارت‌های گویا به صورت مقابل است.



$$\text{مثال: دامنه عبارت‌های گویای } y = \frac{1}{x}, y = \frac{x+1}{x^2 - 6x}, y = \frac{1-2x}{x^3 - 4x} \text{ را بباید.}$$



اعمال روی عبارت‌های گویا:

(الف) ضرب و تقسیم عبارت گویا: پس از تجزیه و ساده کردن صورت و مخرج، ضرب و تقسیم به صورت زیر

اتفاق می‌افتد:

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$



مثال ۲: حاصل را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

a)  $\frac{x^6 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$

, b)  $\frac{x^3 - 1}{(x-1)^3}$

c)  $\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$

, d)  $\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^4 + 16y}$

e)  $\frac{4}{x-2} \times \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

, f)  $\frac{x^2 - 4x}{5x^3} \div \frac{x^2 - 16}{x^2 + 4x}$

**ب) جمع و تفریق عبارت گویا:** پس از گرفتن مخرج مشترک از همه مخرج کسرها و تغییر نک کسرها بر اساس آن، حاصل عبارت را بدست می آوریم.  
نکته: مخرج مشترک همان ل.م.م مخرجها است.



**مثال ۳:** حاصل را بیابید.

a)  $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x^2 - 3x + 2}$

b)  $\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{3}{x-1}$



**مسئله:** حاصل عبارت  $\frac{1+\sin 15^\circ}{1-\sin 15^\circ} - \frac{1-\sin 15^\circ}{1+\sin 15^\circ}$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}\sin 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}$  (۴)

$\frac{\sqrt{3}\sin^2 15^\circ}{\cos 15^\circ}$  (۳)

$\frac{4\sin 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}$  (۲)

$\frac{4\cos 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}$  (۱)



**مسئله:** از اتحاد  $a + \frac{b}{x}$ ، مقدار  $\frac{x+y}{x^2-yx+y}$  چقدر است؟

-۱ (۱)

-۱ (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)



**مسئله:** حاصل  $\frac{x^2+2x+2-x}{x^2-4}$  کدام است؟

۲ (۱)

-۱ (۲)

۱ (۳)

-۱ (۴)



**مسئله:** حاصل عبارت تعریف شده  $\frac{2y}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$  کدام است؟

$\frac{2}{x+y}$  (۱)

$\frac{2}{x-y}$  (۰)

$\frac{2x}{x+y}$  (۲)

$\frac{2x}{y-x}$  (۳)



دانلود از سایت ریاضی سرا

(( کارتان را آغاز کنید، توانایی انجامش بدنیال هی آید. ))



### گویا کردن مخرج عبارت‌های گویا:

الف) مخرج یک جمله‌ای باشد: بر اساس سوال، به یکی از صورت‌های زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$$

الف) مخرج چند جمله‌ای باشد: صورت و مخرج را در مزدوج مخرج، ضرب می‌کنیم.

$$\text{EX)} \quad \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}{5-4} = \sqrt{5} + 14$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5 \times 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5 \times 2}+\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5 \times 2}+\sqrt[3]{2^2}}{3}$$

**ستم:** ساده شده کسر  $A = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$  کدام است؟

$1-\sqrt{2}$  (۴)

$1+\sqrt{2}$  (۳)

$\sqrt{2}-1$  (۲)

$1+\sqrt{2}$  (۱)

**ستم:** حاصل عبارت  $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + 1$  کدام است؟

$\sqrt{3}$  (۴)

$-\sqrt{2}$  (۳)

$\sqrt{2}$  (۲)

$-\sqrt{2}$  (۱)

**ستم:** حاصل عبارت  $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$  کدام است؟

$\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{2}$  (۲)

$\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$  (۱)

$\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$  (۴)

$\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{5}$  (۳)

دانلود از سایت ریاضی سرا

تست ۸: حاصل عبارت  $\left(2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \frac{5\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}\right)^{-1}$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} \quad (۵)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \quad (۶)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} \quad (۷)$$



تست ۹: حاصل عبارت  $\frac{1}{\sqrt[4]{2}-1} + \frac{1-\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1}$  کدام است؟

$$2+\sqrt{12} \quad (۴)$$

$$2+\sqrt{8} \quad (۳)$$

$$2+\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$2+\sqrt{6} \quad (۱)$$



تست ۱۰: حاصل کسر  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$ ، چند برابر  $2+\sqrt{3}$  است؟

$$-(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}) \quad (۲)$$

$$\sqrt[4]{2} + 2 \quad (۱)$$

$$2(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}) \quad (۴)$$

$$-2(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}) \quad (۳)$$



تست ۱۱: خلاصه شده عبارت  $\frac{1}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}} - \sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{6}$  کدام است؟

$$2 \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$\sqrt[4]{2} \quad (۴)$$

$$\sqrt[4]{2^2} \quad (۳)$$



تست ۱۲: اگر گویا شده کسر  $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2})(1 + 2\sqrt[4]{2} + (\sqrt[4]{2})^2)}{x}$  به صورت  $\frac{1}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3}}$  باشد،  $x$  کدام است؟

$$22 \quad (۴)$$

$$25 \quad (۳)$$

$$21 \quad (۲)$$

$$27 \quad (۱)$$



**الف: معادلات درجه اول**

صورت کلی این معادلات  $ax + b = 0$  است و ریشه آن به صورت  $x = -\frac{b}{a}$  است.

نکته: برای حل معادلات درجه اول، ابتدا معلوم مجھول و سپس ساده سازی انجام می‌دهیم تا به عبارتی به صورت بالا برسیم.



**مثال:** معادلات زیر را حل کنید.

$$1) \quad 4x - 2 = 5(3x - 1)$$

$$2) \quad \frac{2x+1}{3} = \frac{x}{2} - 1$$

$$3) \quad 1 - \frac{2x-6}{4} = \frac{x+5}{6}$$

$$4) \quad \frac{4-x}{6} + \frac{2}{3} = x$$

**ب) معادلات درجه دوم:** معادلات درجه دوم در حالت کلی به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  (a ≠ 0) هستند.



حل معادله درجه دوم: برای حل معادلات درجه دوم چندین روش وجود دارد که به شرح بخشی از آنها می‌پردازیم.

**الف) روش تجزیه:** در این روش ابتدا معادله را تجزیه می‌کنیم و در نهایت تک تک معادلات درجه اول بدست آمده را حل می‌کنیم.

$$x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-4) = 0 \\ (x-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4, 3$$

**ب) روش مربع کامل:** با افزودن  $\left(\frac{b}{2}\right)^2$  به طرفین یک معادله درجه دوم در معادله به یک اتحاد مربع کامل می‌رسیم که از طریق گرفتن جذر از طرفین معادله به جواب معادله می‌رسیم.

$$x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -12 + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{12} \\ x-2 = -\sqrt{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{12} + 2 \\ x = -\sqrt{12} + 2 \end{cases}$$

**پ) روش دلتا(کلی):** در این روش ریشه‌های معادله (در صورت وجود) از رابطه  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  بدست می‌آید. که در آن  $\Delta = b^2 - 4ac$  است.

نکته: اگر  $\Delta > 0$ ، معادله دو ریشه حقیقی، اگر  $\Delta = 0$ ، معادله یک ریشه مضاعف و اگر  $\Delta < 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

((اهمیت علی)) : بدانید که کمال دین در طلب دانش و به کار بستن آن است.

**مثال ۲:** معادلات زیر را حل کنید.

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$, x^2 - x = 0$$

$$x^2 - x - 7 = 0$$

$$, 5x^2 - 7x + 1 = 0$$

**مسئله ۱:** معادله  $x^2 + 4x = 1$  را به کمک مربع کامل کردن حل کرده ایم و به عبارت  $(x+a)^2 = b$  رسیده ایم. مقدار  $a+b$  چقدر است؟

۴ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

۷ (۴)



**مسئله ۲:** در حل معادله  $x^2 - 12x + 7 = 0$  به روش مشابه روش مربع کامل، معادله را به فرم  $y(x+b)^2 + c = 0$  می نویسیم. حاصل ضرب ریشه های معادله چند برابر  $b+c$  است؟

$-\frac{3}{4}$  (۱)

$-\frac{7}{4}$  (۲)

$\frac{7}{4}$  (۳)

$-\frac{1}{4}$  (۴)



**مسئله ۳:** اگر معادله  $x^2 + ax + b = 0$  دارای ریشه مضاعف باشد،  $a+b$  کدام است؟

$\frac{3}{4}$  (۱)

$\frac{1}{4}$  (۲)

$-\frac{1}{4}$  (۳)

$-\frac{3}{4}$  (۴)



**مسئله ۴:** حدود  $k$  برای این که تابع پاصلب  $A(x) = \frac{5x^2 - 2x}{-kx^2 + 2x - 9k}$  همواره به ازای جمیع مقادیر حقیقی  $x$  تعریف شده باشد، کدام است؟



$k > \frac{1}{9}$  و  $k < -\frac{1}{9}$  (۱)

$-\frac{1}{9} < k < \frac{1}{9}$  (۲)

$- < k < \frac{1}{9}$  (۳)

$R - \{0\}$  (۴)



**تست ۵:** معادله‌ی درجه‌ی دوم  $\frac{m}{4}x^2 - 4x + 8 = 0$  به‌ازای مقادیر  $m \in (m_0, +\infty)$  ریشه‌ی حقیقی ندارد. کمترین

مقدار  $m_0$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

**تست ۶:** مجموع مربعات سه عدد طبیعی متولی برابر با ۷۷ است. مجموع این سه عدد کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

**تست ۷:** فاصله‌ی هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل، ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق

۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

**تست ۸:** اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - x + m = 0$  برابر دلتای معادله باشد، مقدار مثبت  $m$  چقدر است؟

۱ (۴)

 $\frac{1}{4}$  $\frac{3}{16}$  $\frac{2}{4}$ 

**تست ۹:** در معادله  $-x^2 + 4\sqrt{2}x + 6 = 0$ ، ریشه بزرگ‌تر چند برابر ریشه کوچک‌تر است؟

 $\frac{1}{3}$ 

۳ (۳)

-۳ (۲)

 $-\frac{1}{3}$ 

**مسئلہ ۳:**  $m$  را چنان بیابید که معادله  $x^2 + mx + 1 = 0$  (الف) ریشه حقیقی نداشته باشد. (ب) یک ریشه مضاعف داشته باشد.



نکته: در حل معادله درجه دوم، دو حالت خاص زیر را داریم:

الف) اگر  $a+b+c=0$  باشد، در آن صورت جواب های معادله برابر  $x=1$  و  $x=\frac{c}{a}$  است.

ب) اگر  $a+c=b$  باشد، در آن صورت جواب های معادله برابر  $x=-1$  و  $x=-\frac{c}{a}$  است.

است.

و جواب های معادله  $7x^3 - 4x - 3 = 0$  برابر

۱) جواب های معادله  $3x^2 - x - 2 = 0$  برابر

است.

و جواب های معادله  $2x^2 - 9x - 11 = 0$  برابر

۲) جواب های معادله  $5x^3 - 2x - 7 = 0$  برابر

**مسئلہ ۴:** در معادله درجه دوم  $x^2 + bx + c = 0$  با شرط  $b=c+1$ ، یکی از ریشه های آن به کدام صورت زیر

است؟



c) ۴

$\frac{b}{2}$

$\frac{4b-1}{2}$

-c

۳) ۴

۸

۹

۴



**مسئلہ ۵:** مجموع ریشه های معادله  $x^2 + 8 = 9x^2$  کدام است؟

**مسئلہ ۶:** اگر  $x=1$  یک ریشه از معادله  $x(x+1)=0$  باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

-1

-2

2

1



نکته: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشد، همواره داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a}, |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\alpha^r + \beta^r = S^r - rP, \quad \alpha^r + \beta^r = S^r - rP$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

((اگر هی خواهید چیزی را بدست آورید که تاکنون نداشته‌اید، باید کارهایی که تاکنون نکردید را انجام دهید. ))

**مثال:** مجموع، حاصل ضرب، تفاضل و مجموع مربعات و مکعبات ریشه‌های معادلات  $x^2 - 4x - 1 = 0$ ,  $5x^2 - x - 3 = 0$  را

بیابید.



**مثال:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 8x + 2 = 0$  باشند، مطلوب است:

$$\alpha^2 + \beta^2 =$$

$$, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$$



$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} =$$

$$, \alpha^3 + \beta^3 =$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) =$$

$$, \alpha^2 - \beta^2 =$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$$

$$, \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 =$$

$$2\alpha^2 - 16\alpha =$$

$$, \beta^2 - 8\beta =$$

**تست ۱۳:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 1 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$  کدام است؟

۲۴ (۴)

$\sqrt{6}$  (۳)

۶ (۲)

$\frac{1}{\sqrt{6}}$  (۱)

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 12x + 1 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  چه قدر است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱) خارج ریاضی (۸۵)

**تست ۱۴:**

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۱۱ (۱)



**تست ها:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - x - 3 = 0$  باشند، حاصل  $(\alpha - \beta)^2$  چقدر است؟

**تست ۱۶:** اگر هر کسی از ریشه‌های معادله  $x^2 + \frac{1}{k}x + 27 = 0$  مربع ریشه‌ی دیگر باشد، آن‌گاه  $12k$  کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)



**تست ۱۷:** اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 13x + k}$  باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

۹) ۳/۵ یا ۱

۸) ۴/۵ یا ۳

۲) ۵/۵ یا صفر

۱۲) ۵/۶ یا ۱



**تست ۱۸:** در معادله  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

۱۰) ۴

۱۴) ۲

۱۲) ۲

۱۰)

(خارج ریاضی ۹۱)

**تست ۱۹:** یکی از ریشه‌های معادله  $x = a(x-2)^2$  از ۱۰ برابر ریشه دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت  $a$  کدام است؟

 $\frac{4}{5}$  (۲) $\frac{9}{5}$  (۱) $\frac{5}{4}$  (۴) $\frac{5}{9}$  (۳)

**تست ۲۰:** اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم  $-3mx^2 + 9x + m^2 + 2 = 0$  برابر یک باشد، مجموع آن‌ها کدام است؟

-۳) ۴

۳) ۳

 $-\frac{3}{2}$  (۲) $\frac{3}{2}$  (۱)

**تست ۲۱:** به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$  برابر ۶ می‌باشد؟

 $-\frac{9}{5}$  و ۱ (۴) $-\frac{9}{5}$  و ۱ (۳)

۱) ۲

 $-\frac{9}{5}$  (۱)

(تجربی ۹۳)

**نکته:**

الف) اگر در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  علامت  $b$  را قرینه کنیم، ریشه های معادله قرینه می شوند.

ب) اگر در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  جای ضرایب  $a$  و  $c$  را عوض کنیم، ریشه های معادله معکوس می شوند.

پ) اگر  $c = a$ ، دو ریشه معادله (در صورتی که دلتا مثبت باشد) عکس هم‌اند.

هستند، پس ریشه های معادله  $= 0 - 5x^2 - 5x + 6 = 0$  برابر

چون ریشه های معادله  $= 0 + 5x^2 + 5x + 6 = 0$  برابر

**مثال ۷:**

هستند.

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن قرینه ریشه های  $= 0 - x^3 - 2x^2$  باشند؟

**مثال ۸:**

هستند پس ریشه های معادله  $= 0 - 2x^2 - 2x + 3 = 0$  برابر

چون ریشه های معادله  $= 0 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$  برابر

**مثال ۹:**

هستند.

معادله  $= 0 - 5x^2 - 2x + 2 = 0$  دارای دو ریشه است که

**مثال ۱۰:**

نکته:  
ت) اگر  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، معادله دارای دو جواب با علامت مخالف است. (در این حالت نیازی به محاسبه دلتا نیست)



ث) اگر  $\frac{b}{a} < 0$  و  $\Delta > 0$  و  $\frac{c}{a} > 0$  معادله دو ریشه مثبت و همچنین اگر  $\frac{b}{a} > 0$  و  $\Delta > 0$  معادله دو ریشه منفی دارد.

ج) اگر  $\frac{c}{a} = 0$  و  $\Delta > 0$  معادله لااقل یک ریشه برابر صفر دارد.

**تئیه ۲۲:**

معادله  $= 0, (a \neq 0, a \in \mathbb{R})$  چند ریشه حقیقی دارد؟

۴) بدون ریشه

۳) ۲ غیر هم علامت

۲)

۱) ۲ هم علامت

۱) ۲ هم علامت

**تئیه ۲۳:** - به ازای کدام مقادیر  $m$  از معادله  $= 0 - mx - 2\sqrt{x} + m - 2 = 0$  فقط یک جواب برای  $x$  حاصل می شود؟  
 $2 < m < \frac{3}{2}$  (۴)       $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$  (۳)       $0 < m < 2$  (۲)       $-\frac{3}{2} < m < 2$  (۱) (تجزیی ۸۸)

((آزوهای زندگیان را به اهداف زندگیان تبدیل کنید تا برای رسیدن به آنها تلاش کنید نه اینکه فقط دعا کنید. ))

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، از معادله  $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ ، دو جواب متمایز برای  $x$  حاصل می‌شود؟

۴) هیچ مقدار  $m$

۱  $\leq m < 2$  (۳)

$m < 2$  (۲)

$m \geq 1$  (۱)

تست ۲۴

(خارج تجربی ۸۸)

۴) صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۲۵: معادله  $\sqrt{x} - x + 6 = 0$  چند جواب حقیقی دارد؟

در مورد معادله  $1 - \sqrt{3}x - 4x^2 = 0$  کدام گزینه صحیح است؟

۱) دو ریشه حقیقی مثبت دارد.



۲) دو ریشه حقیقی منفی دارد.

۳) دو ریشه حقیقی مختلف علامت دارد.

۴) ریشه حقیقی ندارد.

تست ۲۶:

نکته: اگر مجموع و حاصل ضرب ریشهای یک معادله به ترتیب برابر  $S$  و  $P$  باشند، معادله

$x^2 - Sx + P = 0$  خواهد بود.



نکته: برای نوشتن یک معادله جدید بر اساس معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  که ریشهایش در ارتباط با ریشهای این معادله باشند، کافیست با استفاده از یک تغییر متغیر به معادله مورد نظر برسیم. راه دیگر برای یافتن معادله جدید، محاسبه  $S$  و  $P$  جدید است.

مثال) معادله درجه دومی را بنویسید که ریشهای آن یک واحد از ریشهای معادله  $x^2 + x - 2 = 0$  کمتر باشند.

روش اول (تغییر متغیر):

$$1) x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1} (y + 1)^2 + (y + 1) - 2 = 0 \Rightarrow y^2 + 3y = 0$$

روش دوم (استفاده از جمع و ضرب ریشهای):

$$2) x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = (\alpha - 1) + (\beta - 1) = S - 2 = -1 - 2 = -3 \\ P' = \alpha' \beta' = (\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = P - S + 1 = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - (-3)x + (-1) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 0$$

((ریشهای معادله  $ax^2 + bx + c = 0$ ،  $a \neq 0$  ریشهای معادله  $ax^2 + bx + ck^2 = 0$  است.)

دانلود از سایت ریاضی سرا

(( کارتن را آغاز کنید، توانایی انجامش بدنیال هی آید. ))

**مثال ۱۰:** معادلات درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن‌ها به ترتیب برابر  $-3$ ,  $5$  و  $2 \pm \sqrt{3}$  باشند.

**مثال ۱۲:** معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن:

الف) یک واحد از دوبرابر ریشه‌های معادله  $x^2 - 1 = 3x + 4$  بیشتر باشند.

ب) از معکوس ریشه‌های معادله  $x^2 + 2x - 4 = 0$  سه واحد بیشتر باشند.

ج) عکس و قرینه ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - 1 = 6x + 8$  باشند.

**مثال ۱۳:** معادلات درجه دومی بباید که ریشه‌های آن  $3$  و  $-2$ - برابر ریشه‌های معادله  $x^2 + ax + b = 0$  باشند.

**تست ۲۷:** اگر هر یک از ریشه‌های معادله  $x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله  $x^2 - 7x + 3 = 0$  باشد،  $a$  کدام است؟

(۴)  $-6$

(۳)  $-8$

(۲)  $-12$

(۱)  $-14$

(تجربی ۸۶)

**تست ۲۸:** ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 + ax + b = 0$  یک واحد از ریشه‌های معادله  $x^2 + bx + 1 = 0$  بیشتر است  $b$  کدام است؟

(۴)  $\frac{4}{3}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۲)  $\frac{1}{3}$

(تجربی ۸۷)

(( اهم اعلی (ع): اندازه های هر کس به اندازه های هفت اوست. ))

**مسئله ۳۹:** - اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $2 = 5x + 3$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب های معادله  $4x^2 - kx + 25 = 0$  به صورت  $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$  است؟

۲۱ (۴)

۲۸ (۳)

۲۹ (۲)

۲۷ (۱)

(ریاضی ۹۰)

(ریاضی ۹۱)

اگر  $\alpha, \beta$  ریشه های معادله  $0 = 4x^2 - 3x - 4$  باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت  $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$  است؟

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (۱)$$

$$4x^2 - 5x - 1 = 0 \quad (۲)$$

$$4x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (۳)$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (۴)$$

(ریاضی ۹۲)

(ریاضی ۹۳)

**مسئله ۴۰:** معادله درجه دومی که ریشه های آن ۳ برابر معکوس ریشه های معادله  $0 = x^2 - 3x + 1$  باشد، کدام است؟

$$x^2 - 9x - 9 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + 9x - 3 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 - 9x + 3 = 0 \quad (۳)$$

$$x^2 - 9x + 9 = 0 \quad (۴)$$

**مسئله ۴۱:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $1 = 3x^2 - 2x$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب های معادله  $0 = -kx - 8x^2 + 1$  به

(خارج ریاضی ۹۰) صورت  $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$  است؟

(ریاضی ۹۱)

(ریاضی ۹۲)

نکته: برای حل معادلات  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  یا  $au^2 + bu + c = 0$  که در آنها یک عبارت بر حسب  $x$  است مشابه معادلات درجه دوم عمل می کنیم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

**مسئلہ ۱۴:** معادله های  $5x^4 - 2x^3 - 1 = 0$ ,  $2(3x-1)^2 + (3x-1) - 3 = 0$  را حل کنید.

۱ (۵)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱) 

**مسئلہ ۳۳:** مجموع ریشه های حقیقی معادله  $x^7 + x^5 - 18(x^7 + x) + 72 = 0$ , کدام است؟

-۴ (۵)

۱ (۳)

-۱ (۲)

۴ (۱)

**مسئلہ ۳۴:** حاصل ضرب جواب های حقیقی معادله  $-11 - 5x^2 - 5x^7 - 2(x^7 + 2)^2 = 0$  کدام است؟

۲ (۵)

۳ صفر

۴ (۲)

۲ (۱) 

**مسئلہ ۳۵:** تعداد جواب های معادله  $\frac{2}{x^7} - 5x - \frac{5}{x} + 2 = 0$  کدام است؟



معادلات گویا: این معادلات به صورت کسری هستند که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای است.

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \text{ریشه‌های مخرج کسر} \right\}$$

نکته: دامنه معادلات گویا به صورت مقابل است.

نکته: برای حل معادلات گویا کافی است طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب کنیم. جواب‌هایی که ریشه مخرج نباشند، مورد قبول هستند.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x^2-3x+2} &= \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \\ \Rightarrow ((x-2)(x-1)) \left( \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \right) &\\ \Rightarrow 2(x-1) + 3 = (x-2) &\Rightarrow x = -3 \notin \{1, 2\} \quad \text{ok} \end{aligned}$$

**مسئلہ:** دامنه توابع  $y = \frac{x+1}{x^2-6x}$ ,  $y = \frac{1-2x}{x^3-4x}$ ,  $y = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{y-x}{x-1}}$



**مسئلہ:** - مجموع ریشه‌های معادله  $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{5}{2}$  کدام است؟

-۶ (۳) ۴ (۰) صفر

۶ (۲)

۱۲ (۱)



**مسئلہ:** - معادله  $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$  دارای چند ریشه حقیقی است؟

۴ (۰) ریشه حقیقی ندارد.

۱ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)



**مسئلہ:** - معادله  $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$  دارای چند ریشه حقیقی است؟

۴ (۰) صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



(()) امام علی(ع): کرامت، زایده‌ی هفت است. (( ))

$$\text{مسئله ۴:} \quad \text{اگر معادله } \frac{3-x}{x+2} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{ax+b}{x^2-4} \text{ کدام است؟}$$

(۴) صفر

۶ (۳)

۱۶

۴ (۱)



**مسئله ۵:** - چند عدد طبیعی وجود دارد که مجموع نصف آن و دو برابر معکوسش برابر  $\frac{10}{3}$  شود؟

(۴) صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



**مسئله ۶:** یک آشپز به همراه شاگردش غذایی را در ۷۲ دقیقه آماده می‌کند. اگر شاگرد بخواهد به تنها ی آن غذا را آماده کند، یک ساعت بیشتر از مدت زمانی طول می‌کشد که آشپز بخواهد آن را به تنها ی آماده کند. شاگرد آشپز آن غذا را به تنها ی در چند ساعت آماده می‌کند؟

۲/۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)



**مسئله ۷:** تعداد جواب‌های معادله  $\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{3}{x-1}$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

(۱) صفر



**مسئله ۸:** مجموع جواب‌های معادله  $x^3 - \frac{1}{x^3} = 3x - \frac{3}{x}$  کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

(۲) صفر

-۱ (۱)



**مسئله ۹:** اگر  $x = 2$  یکی از ریشه‌های معادله  $\frac{a}{x+1} = \frac{a-2x}{x^3+1} + \frac{3a-1}{x^2-x+1}$  باشد، ریشه دیگر این معادله کدام است؟

$$x = \frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$x = -1 \quad (۱)$$

(۴) معادله ریشه دیگری ندارد.

$$x = -\frac{1}{2} \quad (۳)$$



(( امام علی )): هیچ شرافتی چون بلند همی نیست.

**مسئله:** اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{1}{(4a-3)x^2 + 2ax + 1}$  وجود دارد؟

۱ (۴)	۲ (۳)	۳ (۲)	۴ (۱)
-------	-------	-------	-------



نکته: مستطیل طلایی مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

عرض آن باشد. یعنی اگر  $x$  و  $y$  به ترتیب طول و عرض مستطیل باشد داشته باشیم:

نکته: اگر در نسبت طلایی  $\frac{x+y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  باشد خواهیم داشت:  $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}y$ . به این عدد، عدد طلایی می‌گوییم.



- «مستطیل طلایی» مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض این مستطیل کدام است؟

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
-------	-------	-------	-------



**مسئله:** مساحت یک مستطیل طلایی  $(\sqrt{5}+1)/2$  است. محیط مستطیل چقدر است؟

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
-------	-------	-------	-------



معادلات رادیکالی: ساده‌ترین شکل توابع رادیکالی  $f(x) = \sqrt{x}$  است که به هر عضو از دامنه جذرش را نسبت می‌دهد.



دامنه عبارات رادیکالی: در دامنه عبارات رادیکالی با فرجه زوج، باید عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد اما اگر فرجه فرد باشد، زیر رادیکال هر عدد حقیقی می‌تواند باشد.

نکته: برای حل معادلات رادیکالی، طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم. جواب‌هایی مورد قبول هستند که در معادله برقرار باشند.

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} + 1 &= \sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x-1} + 1)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x - 1 + 1 + 2\sqrt{x-1} = x \\ &\Rightarrow 2\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1\end{aligned}$$

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-1} + 1 = 1 \\ \sqrt{1} = 1 \end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{x} = 1 \text{ و } \frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0, \sqrt{x-2} - 2 = 1$$

مثال ۲:



(الف)  $\sqrt{t+2} = 0$

(ب)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$

(پ)  $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$

مثال ۳:

معادلات زیر را حل کنید.

۴ (۴)

۳) صفر

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۱۳: معادله  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} = 0$  چند ریشه حقیقی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۱)

۰) صفر

تست ها: معادله  $2\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2+x-10} = 0$  چند ریشه دارد؟

۴) صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



تست ۱۷: چند عدد صحیح وجود دارد که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد؟

۴) صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



(( اهمیت علی(ع): از تبلیغاتی بی جویی زیرا که این دو خصلت تو را از بهره دنیا و آخوند باز همی دارند. ))

$$\text{معادله} \circ = 0 = \sqrt{4x - 3} + 2$$

- ۱) یک جواب ۲) دو جواب هم علامت ۳) دو جواب با علامت مخالف ۴) جواب ندارد

ست: ۱۷

(درایج ۸۷)



تعداد ریشه های قابل قبول معادله  $t = \sqrt{15 + \sqrt{2x + 80}}$  برابر  $k_1$  و تعداد ریشه های قابل قبول  $x = \sqrt{5x - x^2} + a$  برابر  $k_2$  است، مقدار  $k_2 + k_1$  کدام است؟

- ۱) هیچ ۲) ۳ ۳ ۴) هیچ

۲) ۲

۳) ۱



ست: ۱۸

- ۱) جواب دیگر ندارد ۲) ۳ ۴) جواب دیگر ندارد

۲) ۲

۳)  $\frac{1}{2}$ 

اگر  $x = 2$  یکی از جواب های معادله  $x = \sqrt{5x - x^2} + a$  باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱



ست: ۱۹

جواب های معادله  $x - 5 = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x - 4}$  چگونه است؟

- ۱) یک جواب حقیقی دارد.  
۲) بی شمار جواب حقیقی دارد.

- ۱) جواب حقیقی ندارد.  
۲) دو جواب حقیقی دارد.



اگر  $x = 27$ ، مقدار  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} + \sqrt{x+1}$  کدام است؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱



- تست ۲۳:** دو نقطه روی تیمساز ربع اول و سوم وجود دارد که فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی  $A(2,0)$  برابر  $\sqrt{5}$  باشد. مجموع عرض‌های دو نقطه‌ی مورد نظر کدام است؟
- ۴) ۴      ۲) ۳      -۱) ۲      ۳) ۱



قدر مطلق: برای عبارت جبری  $u$  تعریف می‌کنیم:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

نکته: در حالت کلی داریم:  $c = \pm x \Rightarrow x = c$ . از این موضوع برای حل معادلات قدرمطلقی استفاده می‌کنیم.

#### مثال ۴:

جواب معادلات و نامعادلات زیر را بیابید.

$$2|x - 5| + 3 = 11$$

$$|3x - 4| = 2|x|$$



$$\|x - 10| - 6| = 2$$

$$|3 + |x - 1|| = 6$$

**تست ۲۴:** معادله  $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0$  چند جواب دارد؟

- ۴) بیشمار      ۲) ۳      ۱) ۲      ۰) ۱



**تست ۲۵:** مجموعه جواب معادله  $|x - 3| + x = 3$  کدام است؟

- $\emptyset$  (۴)       $(-\infty, 3]$  (۳)       $[3, \infty)$  (۲)       $[0, 3]$  (۱)



**تست ۲۶:** اگر  $x^7 + 6x^4 + 9 + \sqrt[7]{x^7 + 2x^4 + 3x + 1} + \sqrt[7]{x^7 + 2x^4 + 3x + 1} < 0$  حاصل عبارت  $x^7 + 7x + 12 < 0$  کدام است؟

- ۲) ۱      ۲) ۲      ۴) ۴      -۴) ۴





تعیین علامت چندجمله‌یها: برای تعیین علامت هر چند جمله‌ای، ابتدا همه ریشه‌های آنرا می‌یابیم و سپس در جدول علامت سمت راست بزرگترین ریشه را هم علامت ضریب بزرگترین توان قرار می‌دهیم و سپس یکی در میان این علامت را در بین سایر ریشه‌ها (به جز ریشه‌های مضاعف از درجه زوج) تغییر می‌دهیم.

مثال: عبارت  $P = (x^2 + 1)(x^2 - 3x)$  را تعیین علامت کنید.

$$\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = +\sqrt{3}, x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\sqrt{3}$	*	*	$\sqrt{3}$
p	-	+	-	+

نکته: عبارات کسری نیز مانند عبارات ضربی تعیین علامت می‌شوند، با این تفاوت که این عبارات در ریشه مخرج تعریف نشده هستند.

مثال: عبارت  $P = \frac{x^2 - 2x}{x+1}$  را تعیین علامت کنید.

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

x	-1	*	2
p	-	بن	+

نکته: عباراتی که ریشه‌ی حقیقی ندارند ( $\Delta < 0$ ), همیشه هم علامت ضریب بزرگترین جمله هستند.

**مثال:** تعیین علامت کنید.

a)  $P = (4x + 2)^3(x^2 - 3x)$

, b)  $P = x^3 - x$

c)  $P = x^3 + x^2 - 3x - 3$

, d)  $P = \frac{2x^2 - x}{1-x}$

((اهم اعلی)) برای دنیای چنان کار کن که گویا برای همیشه در این دنیا خواهی بود، برای آخوند چنان سعی و تلاش کن که گویا فردا از دنیا خواهی رفت.)))

**تست:** اگر  $x \geq 3$  باشد، مجموعه جواب‌های نامعادله  $|x-2| \leq 2$  کدام است؟

$$x \geq 5 \quad (4) \quad 3 \leq x \leq \frac{7}{2} \quad (3) \quad 3 \leq x \leq 5 \quad (2) \quad 3 \leq x \leq 4 \quad (1)$$



**تست:** اگر برای تعیین علامت  $p(x)$  و  $q(x)$  به ترتیب از راست به چپ جداول زیر رسم شده باشد، آن‌گاه  $m < n$

$$(a, c > 0 \text{ و } q(x) = cx^2 + bx + a, p(x) = ax^2 + bx + c) \text{ کدام است؟}$$



$$\begin{array}{c|ccc} x & \frac{1}{n} & -\frac{n}{a} & \\ \hline q(x) & + & - & + \\ \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} x & \frac{1}{m} & -\frac{m}{a} & \\ \hline p(x) & + & - & + \\ \end{array}$$

$$\frac{1}{n} \quad (5) \quad \frac{1}{m} \quad (3) \quad \frac{1}{m} \quad (2) \quad \frac{1}{n} \quad (1)$$

**نکته:** برای تعیین علامت  $p(x) = ax^2 + bx + c$  با ریشه‌های  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha < \beta$  که بدون جدول داریم:

$$\text{i: } ap \geq 0 \Rightarrow x \leq \alpha \vee x \geq \beta \quad \text{ii: } ap \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta$$



برای عبارات کسری نظیر  $p(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  شبیه بالا عمل می‌کنیم با این تفاوت که بجای علامت  $a$  از علامت  $ac$  استفاده می‌کنیم.

**مسئلہ:** عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

a)  $P = x^2 - 5x + 6$

, b)  $P = -x^2 + 5x$

**تست:** عبارت  $P(x) = x^2 + ax + b$  به ازای  $x < 2$  منفی و به ازای بقیه مقادیر نامنفی است. مقدار  $a + b$  کدام است؟

-11 (4)

11 (3)

-1 (2)

1 (1)



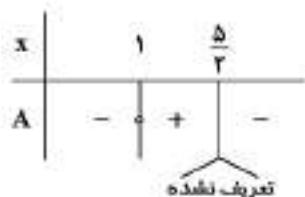
**تست:** جدول تعیین علامت عبارت  $A = \frac{ax+b}{a-2x}$  به صورت مقابل است. مقدار  $b$  کدام است؟

5 (1)

2 (2)

-2 (3)

-5 (4)



دانلود از سایت ریاضی سرا

**الف) نامعادلات درجه اول:**

صورت کلی این نامعادلات به یکی از صورت‌های زیر است:

$$ax + b \leq 0, ax + b < 0, ax + b > 0, ax + b \geq 0, (a \neq 0)$$

**نکته:**

- (الف) اگر طرفین یک نامعادله در یک عبارت منفی ضرب یا تقسیم شود، جهت آن عوض می‌شود.  
 (ب) اگر طرفین یک نامعادله هم‌علامت باشند، با معکوس کردن طرفین نامعادله جهت آن عوض می‌شود.

**مسئلہ ۳:** نامعادلات زیر را حل کنید.

$$6x - 2 < 2(x - 1)$$

$$\frac{x - 2}{5} \geq \frac{x}{6}$$

$$-2 \leq 2x + 5 < 9$$

$$2 < \frac{1 - 3x}{5} < 7$$

**مسئلہ ۷:**

$$|x - 4| < 2x - 5 \quad \text{کدام است؟}$$

$$(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5) \quad (4) \quad (1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty) \quad (3) \quad (1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}) \quad (2) \quad (1, 5) \quad (1) \quad (\text{ریاضی ۹۲})$$

**مسئلہ ۸:**

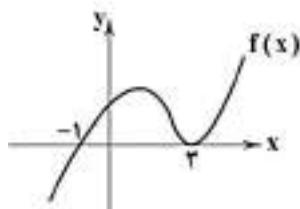
$$\text{چند عدد صحیح منفی در نامعادله } \frac{1+x}{3} - 2 < 0 \text{ می‌کند؟}$$

(۱) ۴  
 (۲) ۳  
 (۳) ۲  
 (۴) ۱



**مسئلہ ۸:**

$$\text{اگر } f(x) \text{ به صورت زیر باشد، آنگاه جواب نامعادله } < 0 \text{ کدام است؟}$$



$$\begin{aligned} & (-1, +\infty) \quad (1) \\ & (-1, 2) \quad (2) \\ & (-1, 0) \quad (3) \\ & (+, +\infty) \quad (4) \end{aligned}$$



(( امام علی (ع) : لذت فهیدن، مخصوص جوینده یابنده است. ))



### ب) نامعادلات درجه دوم و کسری

برای حل این نوع نامعادلات، ابتدا تمام عبارات را به یک سمت نامعادله منتقل می‌کنیم و در نهایت بعد از ساده سازی، به کمک تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم.

$$\frac{x-4}{x-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{3x-4}{4-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{3x-4+x^2+4}{4-x^2} \leq 0 \Rightarrow p = \frac{x^2+3x}{4-x^2} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3, x=0 \\ x=-2, x=2 \end{cases}$$

x	-3	-2	0	2
p	-	+	+	-
	≥	≥	≥	≥

### مثال ۴:

a)  $x^2 - 9 < 0$ .

, b)  $\frac{x^2 + 5x}{x+2} \geq 0$ .



**مثال ۵:** مجموعه جواب نامعادلات  $x^2 - 12x + 27 > 0$ ,  $-2x^2 - 5x + 7 \geq 0$ ,  $x - x^2 + 6 \geq 0$  را باید.



**مثال ۶:** مجموعه جواب نامعادلات  $\frac{2x+6}{x-1} \leq 0$ ,  $\frac{3-x}{x+4} < 0$  را باید.



**سوچ:** مجموعه جواب نامعادله  $\frac{3x-5}{6x^2-7x-5} < 0$  کدام است؟

( $-\infty, \frac{5}{3}$ ) (۱)

( $-\infty, -\frac{1}{2}$ ) (۲)

( $-\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ ) (۳)

( $-\infty, -\frac{1}{2}$ ) (۴)



دانلود از سایت ریاضی سرا

**مسئلہ ۱۰:** بے ازای کدام مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $3x^2 + mx - 3 = 0$  دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

(۲) هیچ مقدار  $m$ (۱) هر مقدار  $m$  $m > 6$  (۳) $m = \pm 6$  (۴)

- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5; x > -1$  زیر محور  $x$  ها است. بیشترین مقدار  $a - b$  کدام است؟

2 (4)

4 (3)

3 (2)

5 (1)

**مسئلہ ۱۱:**

(ریاضی ۸۸)

**مسئلہ ۱۲:** مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^2 - x^2}{2x^2 - 3} > 1$  کدام است؟

 $\{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$  (۱) $\emptyset$  (۲) $\{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$  (۳) $\mathbb{R} - \{1\}$  (۴)

**مسئلہ ۱۳:** مجموعه جواب نامعادله  $\frac{-x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} > 0$  کدام است؟

 $(-\infty, 5)$  (۱) $(-\infty, -2) \cup (1, 5)$  (۲) $(-5, +\infty)$  (۳) $(-2, 1)$  (۴)

**مسئلہ ۱۴:** مجموعه جواب نامعادله  $\frac{1}{x-2} < \frac{1}{x-3}$  کدام است؟

 $\mathbb{R} - (2, 3)$  (۱) $[2, 3]$  (۲) $\mathbb{R} - [2, 3]$  (۳) $(2, 3)$  (۴)

**مسئلہ:** مجموعہ جواب نامعادله  $\frac{2x(x-1)^7(x-2)^4}{|x+1|} > 0$  کدام است؟

$$\left( (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \right) - \{-1\} \quad (1) \quad [2, +\infty) \quad (\text{X})$$

$$\{-1\} \cup (2, +\infty) \quad (\text{X}) \quad \left( (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \right) - \{-1\} \quad (\text{X})$$

**مسئلہ:** مجموعہ جواب نامعادله  $\frac{(x+2)^7(x^7 - 2x + 2)}{(-x^7 + x)^5} \geq 0$  کدام است؟

$$(0, 1) \cup (1, 2] \cup \{-2\} \quad (2) \quad (0, 2] \cup \{-2\} \quad (\text{X})$$

$$[-2, 0] \cup (1, 2] \quad (\text{X}) \quad (0, 2] \quad (\text{X})$$

**مسئلہ:** در کدام فاصلہ زیر منفی است؟  $A = \frac{x^7 - 2x}{x^7 + x + 1}$

$$(-2, 0) \quad (\text{X}) \quad (1, 2) \quad (\text{X}) \quad (2, 3) \quad (\text{X}) \quad (-4, 2) \quad (1)$$

**مسئلہ:** جواب نامعادله  $1 - 2x < x^7 + 1 < x + 1$  کدام است؟

$$(0, 1) \quad (\text{X}) \quad (-1, 0) \quad (\text{X}) \quad (-\infty, -2) \quad (\text{X}) \quad \mathbb{R} \quad (\text{X})$$

**مسئلہ:** جواب نامعادله  $\frac{x^7 + x - 2}{|x| + 1} < 0$  را به صورت  $|x - \alpha| < \beta$  تبدیل کرده ایم. مقدار  $\alpha + \beta$  چقدر است؟

$$2 \quad (\text{X}) \quad -\frac{1}{2} \quad (\text{X}) \quad -\frac{3}{2} \quad (\text{X}) \quad 1 \quad (\text{X})$$

نکته: در حالت کلی داریم:

$$x^7 \leq a^7 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad , \quad x^7 \geq a^7 \Leftrightarrow (x \geq a \quad \vee \quad x \leq -a)$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

((اهم علی (ع)): عبادت کننده بدون دانش، هائند چهارپای آسیاب است که هیگردد و از هکان خود خارج نمیشود.))

**مثال ۷:** نامعادله مقابله را حل کنید.

$$x^2 - 16 > 0 \Rightarrow$$

$$4x^2 - 20 \leq 100 \Rightarrow$$

$$5 - x^2 < 2 \Rightarrow$$

$$2(6 + 2x) > x^2 + 4x + 1$$

نامعادلات قدر مطلقی: در حالت کلی از این روابط زیر برای حل نامعادلات قدر مطلقی استفاده می‌کنیم.



$$|x| \leq c \Rightarrow -c \leq x \leq c, |x| \geq c \Rightarrow x \leq -c \vee x \geq c$$

$$\text{EX)} \quad |x| < a \Rightarrow -a < x < a, |x - 2| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3 \\ x - 2 \leq -1 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

**مثال ۸:** جواب نامعادلات زیر را بیابید.



$$|2x + 3| < 2$$

$$2|x + 1| - 4 \leq 0$$

$$|2x - 5| - 5 > 1$$

$$\left| \frac{x+1}{1-x} \right| > 2$$

تست ۲۰: مجموعه جواب نامعادله  $|x-1| - \frac{x-1}{2} \geq 3$  شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱۰ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)



**مسئلہ ۲۱:** کدامیک از گزینہ‌ها قسمتی از جواب نامعادله  $\frac{x^2 - 9}{2x + 1} > 0$  است؟

۴)  $-2 < x < -1$ ۵)  $-1 < x < +\infty$ ۶)  $0 < x < 1$ ۷)  $1 < x < 2$ 

**مسئلہ ۲۲:** مجموعه جواب نامعادله  $|x^2 + x| \leq 2$  به صورت  $[a, b]$  است. حاصل  $b - a$  کدام است؟

۸) ۴

۹) ۳

۱۰) ۲

۱۱) ۱



**مسئلہ ۲۳:** مجموعه جواب نامعادله  $\left| \frac{4x - 3}{x + 2} \right| \leq 2$  به صورت  $[a, +\infty)$  است.  $a$  کدام است؟

۱۲)  $-\frac{7}{8}$ ۱۳)  $\frac{1}{2}$ ۱۴)  $-\frac{1}{8}$ ۱۵)  $-\frac{1}{4}$ 

**مسئلہ ۲۴:** اگر مجموعه جواب نامعادله  $5 |ax + b| > R - [-3, 2]$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

۱۶) ۵

۱۷) ۴

۱۸) ۳

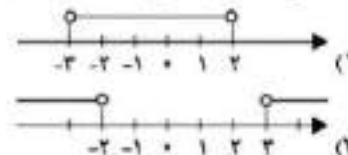
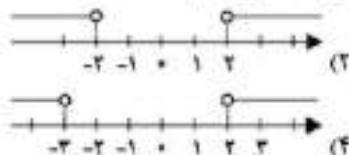
۱۹) ۲



**مسئلہ ۲۵:** مجموعه جواب نامعادله  $\left| \frac{x-1}{2} - 2 \right| \geq 2$  کدام است؟

۲۰)  $[1, 9]$ ۲۱)  $(-\infty, -1] \cup [9, +\infty)$ ۲۲)  $(-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$ ۲۳)  $[-1, 9]$ 

**مسئلہ ۲۶:** نمایش مجموعه جواب نامعادله  $5 |2x + 1| > 0$  بر روی محور کدام است؟



((اهم علی(ع): رشد انسان، به خرد و ارزشش به آگاهی اوست. ))

**مسئله ۲۷:** اگر مجموعه جواب نامعادله‌های  $A \leq -2x + 3 \leq B$  برابر باشند،  $A + B$  کدام است؟

-۷ (۴)      ۷ (۳)      -۶ (۲)      ۶ (۱)



**مسئله ۲۸:** اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی  $|2x + b| > c$  به صورت زیر باشد، در این صورت حاصل  $2c - b$  کدام است؟



-۶ (۲)  
-۸ (۴)

۶ (۱)  
-۶ (۳)



**مسئله ۲۹:** مجموعه جواب معادله  $\left| \frac{x-2}{x-3} \right| \leq \frac{2-x}{x-3}$  کدام است؟

[۰, ۳) (۴)      [۲, ۳) (۳)      (۲, ۴) (۲)      (۲, ۳) (۱)



**مسئله ۳۰:** مجموعه جواب نامعادله  $2x - |x - 1| > 8$  کدام است؟

{ $x | x > 9 \quad x < 1$ } (۴)      { $x | x > 7 \quad x < 1$ } (۳)      { $x | x > 9$ } (۲)      { $x | x > 7$ } (۱)



**مسئله ۳۱:** مجموع تمام اعداد صحیحی که در نامعادله  $|x^2 + 2x - 11| \leq 7$  صدق می‌کنند، کدام است؟

-۹ (۵)      -۹ (۳)      ۹ (۲)      ۹ (۱)





**تعريف الگو:** به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد می‌باشد که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده و یا ترکیبی از این دو باشد.

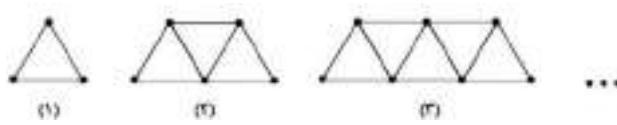
**جمله عمومی الگو:** جمله عمومی یک الگو رابطه‌ای است که ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند و به کامل آن می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد.

**نکته:** اگر جمله عمومی یک الگو را  $a_n$  در نظر بگیریم، آنگاه متنظر از  $a_1$  جمله اول این الگو و در کل منظور از  $a_n$ ، جمله  $n$ ام الگو است.

**الگوی خطی:** به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت  $t_n = an + b$  است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. واضح است که در این نوع دباله‌ها، میزان تغییر جملات متوالی برابر  $a$  است. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب  $n$  است.

**مثال:** جمله‌ی عمومی الگوی زیر را بیابید.

$n$	۱	۲	۳	...
$a_n$	۵	۸	۱۱	...

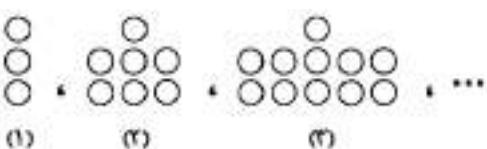


**مسئله ۱:** با توجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خطها در شکل چندم برابر ۸۷ است؟

۲۱ (۱)

۲۲ (۲)

۲۳ (۳)



(۱)

(۲)

(۳)

۲۱ (۴)

۲۲ (۲)

۲۳ (۱)



**مسئله ۲:** با توجه به الگوی زیر، هشتادین شکل شامل چند دایره است؟

۲۴ (۱)

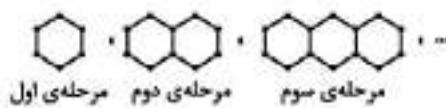
**مسئله ۳:** با توجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خطها در مرحله‌ی دهم کدام است؟

۵۰ (۱)

۵۱ (۲)

۵۲ (۳)

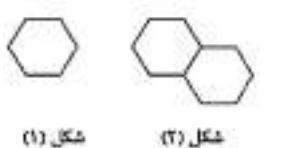
۵۳ (۴)



مرحله‌ی دوم

مرحله‌ی سوم

...



تست ۴: با توجه به الگوی زیر، در شکل چندم این الگو ۴۶ پاره خط وجود دارد؟

۹ (۲)

۸ (۱)



۱۰ (۴)

۷ (۳)



تست ۵: اگر  $c_n$  جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی،  $c_4 = 17$ ,  $c_6 = 41$  باشد،  $c_n$  کدام است؟

$c_n = 4n + 4$

$c_n = 5n - 9$

$c_n = 4n + 1$

$c_n = 5n - 3$

(۱)



**الگوی غیر خطی:** اگر جملات دنباله‌ها از الگوی غیر از الگوی خطی پیروی کند، غیر خطی نامیده می‌شود.



۲, ۸, ۱۸, ۳۲, ...

تست ۶: الگوی زیر از چه نوعی و جمله‌ی عمومی آن کدام است؟

$a_n = 2n^2$

$a_n = 2n^2 - 1$

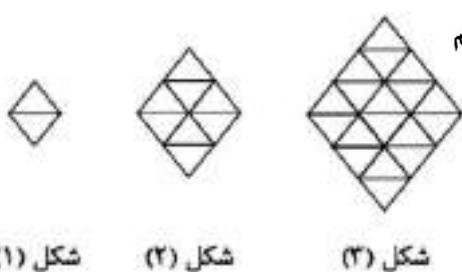
(۱)



$a_n = 2n^2 - 1$

$a_n = 2n^2 + 1$

(۲)



تست ۷: با توجه به الگوی موجود در شکل‌های زیر، تعداد مثلث‌های کوچک در شکل دهم

چقدر می‌باشد؟

(۱)



۲۲۴ (۲)

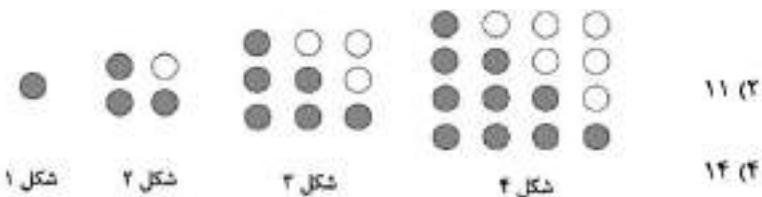
(۱)

۱۹۶ (۴)

(۲)

شکل (۱)      شکل (۲)      شکل (۳)

تست ۸: با توجه به الگوی زیر، اختلاف تعداد دایره‌های سیاه و سفید در شکل یازدهم کدام است؟



۱۱ (۲)

(۱)

۱۴ (۴)

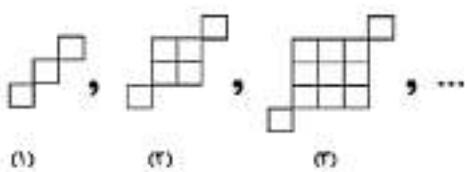
(۲)

(۳)



((اهم‌العلی (ع)): تقوی‌الهی پیش‌کن گرچه اندک، و هیان خود و خدای خویش درین نگه دار و لو کم‌رنگ . ))

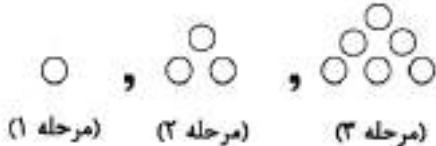
در الگوی شکل زیر، تعداد قوطی‌کبریت‌ها در مرحله‌ی یازدهم کدام است؟ (□ : یک قوطی‌کبریت)



۲۱۰ (۴) ۱۲۱ (۳)  
۱۲۲ (۴) ۷۶ (۳)



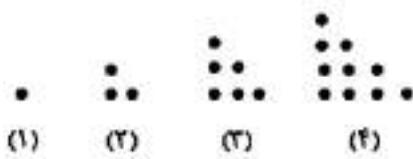
در دنباله‌ی مثلثی شکل زیر، مرحله‌ی بیستم شامل چند دایره است؟



۲۵ (۳) ۲۰۵ (۱)  
۲۲۰ (۴) ۲۱۰ (۳)



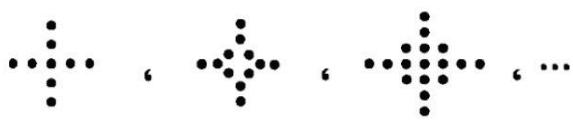
در الگوی زیر، تعداد نقاط چندمین شکل برابر ۵۰۵۰ است؟



۱۵۰ (۱) ۱۵۱ (۲)  
۱۰۰ (۳) ۱۰۱ (۴)



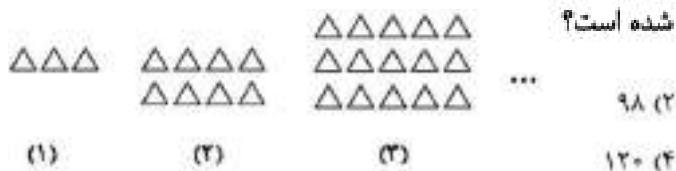
در چندمین شکل از الگوی غیرخطی زیر، تعداد دایره‌های سیاه برابر ۱۲۹ می‌شود؟



۱۱۲ (۲) ۷ (۱)  
۱۰ (۴) ۱۹ (۳)



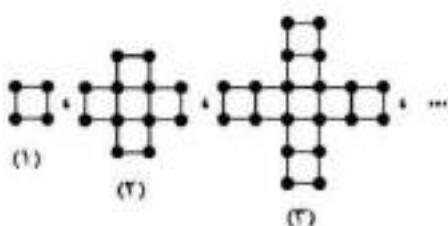
در الگوی مقابل، شکل دهم از چند مثلث تشکیل شده است؟



۹۸ (۲) ۱۲۰ (۴) ۱۱۲ (۳)



با توجه به الگوی زیر، در کدام مرحله تفاضل تعداد مریخ‌ها از تعداد چوب‌کبریت‌ها برابر ۹۱ است؟



۸ (۱)  
۱۰ (۲)  
۱۲ (۳)  
۱۴ (۴)



دانلود از سایت ریاضی سرا

تست ۱۶: در یک الگوی غیرخطی درجه دوم، جملات اول تا چهارم دنباله برابر  $t_1 = 5$ ,  $t_2 = 10$ ,  $t_3 = 17$ ,  $t_4 = 26$  و

$t_5 = ?$  است. جمله‌ی پانزدهم دنباله کدام است؟

۹۲ (۴)

۱۲۲ (۳)

۱۲۰ (۲)

۸۸ (۱)



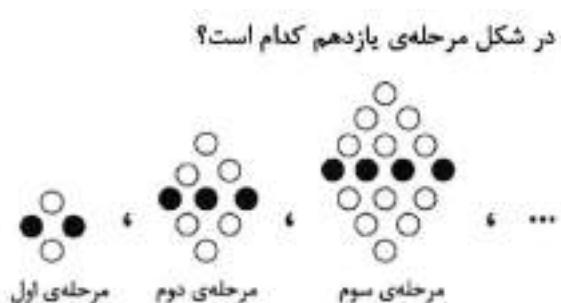
تست ۱۷: با توجه به الگوی زیر، تعداد شش ضلعی‌ها در مرحله دهم کدام است؟

۲۱۷ (۱)

۲۷۱ (۲)

۳۰۱ (۳)

۲۲۱ (۴)



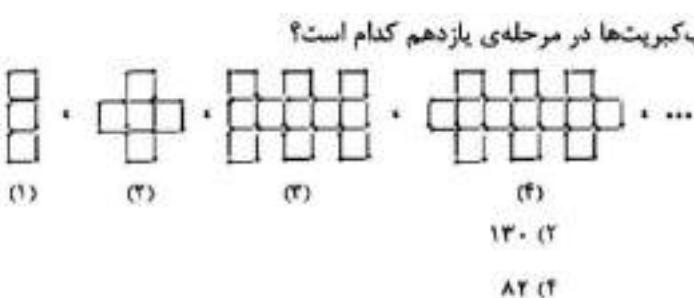
تست ۱۸:

۱۳۲ (۱)

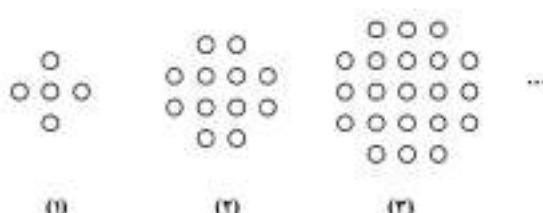
۱۳۶ (۲)

۱۲۲ (۳)

۱۲۶ (۴)



تست ۱۹:



تست ۲۰: با توجه به الگوی زیر در شکل چندم، تعداد دایره‌ها برابر ۱۱۷ می‌شود?

۱۱۰ (۱)

۸۱۲ (۲)

۱۱ (۳)

۹ (۴)



۱) تعریف دنباله: دنباله تابعی است که به هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد.

$$a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

$$d_n = \begin{cases} n+1 \\ 4n+3 \end{cases}, c_n = \begin{cases} n^2 - 3n \\ n^2 + 1 \end{cases}, b_n = \sqrt{n^2 + 1}, a_n = \frac{3n+2}{n}$$

مثال ۲:

جمله‌ی اول آن را بنویسید.

**تست ۲۰:** در یک دنباله اعداد،  $a_1 = 1$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ . جمله هشتم این دنباله، کدام است؟

۲۵۵ (۴)      ۲۴۷ (۳)      ۱۵۹ (۲)      ۱۲۷ (۱)      تجربی ۹۵

**تست ۲۱:** در یک دنباله اعداد  $3 = a_1$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} - 2$ . حاصل  $a_4 - a_7$  کدام است؟

۶۴ (۴)      ۵۶ (۳)      ۴۸ (۲)      ۳۲ (۱)      تجربی خارج ۹۵



۲) دنباله حسابی(عددی): جملات این دنباله‌ها از جمع عدد قبلی با یک عدد ثابت به نام قدر نسبت حاصل می‌شوند. پس در حالت کلی ظاهر این دنباله‌ها بصورت  $\dots, a, a+d, a+2d, \dots$  محسوب می‌شود. و همچنین جمله‌ی عمومی این دنباله‌ها در حالت کلی به شکل  $a_n = a + (n-1)d$  قدر نسبت است.



نکته: قدر نسبت در این دنباله‌ها از رابطه  $d = a_n - a_{n-1}$  محاسبه می‌شود. و همچنین جمله‌ی عمومی این دنباله‌ها در حالت کلی به شکل  $a_n = a + (n-1)d$  است.

مثال ۳:

در دنباله  $\dots, -1, 2, 5$  قدر نسبت و جمله  $a_{25}$  و جمله  $a_{20}$  را مشخص کنید.

**تست ۲۲:** اگر در یک دنباله‌ی حسابی، جمله  $(-1)^n a$  به صورت  $2^n - 2^n$  باشد، جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۷۶ می‌باشد؟ ( $n > 1$ )

(۱) سی ام

(۲) هشتاد و چهارم

(۳) هشتاد و سیم

(۴) هشتاد و یکم



دانلود از سایت ریاضی سرا

(()) مسولیت زندگیتان را به عهده بگیرید، بدانید فقط شما هستید که هیچ‌کس دیگری. (( ))

**تست ۲۳:** در یک دنباله‌ی حسابی با جملات مثبت، حاصل ضرب جمله‌ی اول و پنجم برابر ۵۷ و حاصل ضرب جمله‌ی

دوم و چهارم برابر ۱۰۵ است. در این صورت سومین جمله‌ی دنباله کدام است؟

۱۵) ۴

۱۳) ۳

۱۱) ۲

۹) ۱



**نکته:** اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  به ترتیب سه جمله از یک دنباله حسابی باشند، به  $b$  وسط عددی

$$\text{میگوییم و داریم: } b = \frac{a+c}{2}$$



**نکته:** اگر جمله‌ی  $a_m$  و  $a_n$  از یک دنباله حسابی را داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

**نکته:** در دنباله‌های حسابی، مجموع  $n$  جمله متولی، برابر است با  $n$  برابر جمله وسط آن جملات.

**نکته:** علاوه بر نکته بالا، میتوان، میتوانیم مجموع  $n$  جمله اول در دنباله‌های حسابی را از رابطه

زیر بیابیم:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

**تست ۲۴:** در مجموعه اعداد طبیعی عدد ۵ وسط عددی چه اعدادی است؟



**تست ۲۵:** اگر در یک دنباله جمله ششم ۱۵ و جمله دهم ۳۴ باشد، قدر نسبت دنباله را بیابیم.



۱۷۳) ۴

۱۷۴) ۳

۱۷۵) ۲

۱۷۶) ۱



**تست ۲۶:** در دنباله حسابی  $a_n$ ، اگر  $a_4 = ۲۰$  و  $a_8 = ۵۶$ ، مقدار  $a_{21}$  کدام است؟

**تست ۲۵:** در یک دنباله‌ی حسابی،  $a_3 + a_5 = 16$  و  $-a_5 - a_7 = -160$  است، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

-۵ (۴)

۵ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)



**تست ۲۶:** اگر در یک دنباله‌ی حسابی جملات چهارم و یازدهم به ترتیب ۶۴ و ۲۲ و جمله‌ی آخر دنباله ۲۰ باشد،

اين دنباله چند جمله دارد؟



۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

**تست ۲۷:** اگر جمله‌ی سوم و پنجم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب از راست به چپ برابر ۳۳ و ۱۹ باشد، چند جمله‌ی

این دنباله مثبت است؟



۱۳ (۴)

۷ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

**تست ۲۸:** در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی دوم برابر با ۳ و مجموع سه جمله‌ی چهارم برابر با ۳۹ است.

جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟



۹ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۱ (۱)

**تست ۲۹:** در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول دنباله برابر ۱ و مجموع پنج جمله‌ی اول آن برابر با یک چهارم

مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. قدرنسبت دنباله کدام است؟



-۲ (۲)

-۲ (۱)

-۶ (۴)

-۴ (۳)

**تست ۳۰:** در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات دوم، هشتم و دهم از سه برابر جمله‌ی ششم ۱۰ واحد بیشتر

است. تفاضل جملات نهم و چهارم، مربع کدام عدد است؟



۷ (۲)

۸ (۱)

۵ (۴)

۶ (۳)

دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۳۱:** اگر سه جمله‌ی متولی یک دنباله‌ی حسابی  $m+2$ ,  $5m-2$ ,  $7m+4$  باشند، مقدار  $k$  کدام است؟

۱۰ (۲)

-۱۰ (۱)



۱۲ (۴)

-۱۲ (۳)

**تست ۳۲:**اگر ...  $m+2$ ,  $5m-2$ ,  $7m+4$ , ... سه جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی کدام است؟

$$a_n = 7n + 2 \quad (۱)$$

$$a_n = 7n + 4 \quad (۲)$$

$$a_n = 7n + 1 \quad (۳)$$

$$a_n = n + 5 \quad (۴)$$

**تست ۳۳:**اعداد  $1 - 4, 5p - 4, 3p + 4, 2p + 3, 3p + 4, 5p - 4$  سه جمله‌ی متولی یک تصاعد عددی هستند. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

(ریاضی ۸۴)

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



**تست ۳۴:** به ازای کدام مقدار  $m$  عدد  $\frac{1}{8}$  واسطه‌ی عددی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله  $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$  است؟

(ریاضی ۸۴)

-۴ (۴)

۴ (۳)

-۳ (۲)

۳ (۱)

**تست ۳۵:**

تصاعد حسابی به جمله اول ۶۳ و قدر نسبت (-۴) چند جمله مثبت دارد؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)



**تست ۳۶:** در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات هفدهم و سی و چهارم، سه برابر جمله‌ی بیستم است. کدام گزینه در مورد این دنباله صحیح است؟



(۱) جمله‌ی نهم دنباله، منفی است.

(۲) جمله‌ی نهم دنباله، مثبت است.

(۴) نه جمله‌ی منفی دارد.

(۳) جمله‌ی هشتم دنباله، مثبت است.

نکته: اگر جمله  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و بخواهیم بین این دو عدد  $n$  عدد دیگر بگنجانیم

بطوری که جملات حاصل یک دنباله عددی را تشکیل دهند، خواهیم داشت:  $d = \frac{b-a}{n+1}$



**مثال:** بین اعداد ۲۰ و ۳۵ چهار وسط عددی درج کنید.



**تست ۳۷:** بین دو عدد ۷ و ۵۵ به تعداد هفت جمله طوری نوشته شده است که دنباله‌ی حسابی تشکیل شود، جمله‌ی وسط کدام است؟

۳۳ (۴)

۳۲ (۳)

۳۱ (۲)

۲۹ (۱)



**تست ۳۸:** بین دو عدد حقیقی و متغیر  $\sqrt{k} + k - \sqrt{k}$ ، چند عدد برحسب  $k$  باید فرار دهیم تا اعداد حاصل،

تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت ۱ بدهند؟ ( $k \in \mathbb{N}$ )



$\sqrt{k} - 2$  (۵)

$\sqrt{k} - 1$  (۷)

$\sqrt{k} + 1$  (۶)

$\sqrt{k}$  (۱)

نکته: جملات مشترک هر دو دنباله حسابی نظیر  $a_n$  و  $b_n$ ، یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $[a_n, b_n]$  ایجاد می‌کنند.



**تست ۳۹:** جمله بیست و یکم از دنباله حاصل از جملات مشترک دنباله‌های  $\begin{cases} 1, 3, 5, \dots \\ 4, 9, 14, \dots \end{cases}$  کدام است؟

۲۱۵ (۴)

۲۰۹ (۳)

۱۹۵ (۲)

۲۰۵ (۱)



(( اهم‌العلی (ع) : کسی که خویش را در کسب داشت به زحمت نیندازد، گویهای پیشی گرفتن را به دست نیاورد. ))

تست ۴۰: در دو دنباله حسابی به صورت‌های  $2, 7, 12, \dots$  و  $8, 11, 14, \dots$  چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

۵۹ (۳)

۵۸ (۱)

۶۱ (۴)

۶۰ (۳)



(خارج) (۹۴)

در دنباله‌های حسابی « $2, 9, 16, 23, \dots$ » و « $12, 17, 22, 27, \dots$ » چند عدد سه رقمی مشترک کوچک‌تر از  $350$  موجود است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



(خارج) (۹۵)

نکته: اگر برای چهار عدد طبیعی داشته باشیم  $m+n=p+q$  در آن صورت در هر دنباله حسابی خواهیم



داشت:  $a_m + a_n = a_p + a_q$

تست ۴۱: در یک دنباله حسابی جملات هشتم، سیزدهم و شصت و هفتم به ترتیب برابر  $11$ ،  $36$  و  $306$  هستند. جمله  $62$  کدام است؟

۲۶۹ (۴)

۲۵۹ (۳)

۲۸۱ (۲)

۲۶۳ (۱)



( دنباله هندسی: جملات این دنباله‌ها از ضرب عدد قبلی در یک عدد ثابت به نام قدر نسبت حاصل می-



شوند. پس در حالت کلی ظاهر این دنباله‌ها بصورت  $\dots, a, aq, aq^2, \dots$  است. که در آن  $a$  جمله‌ی اول و  $q$  قدر نسبت است.

نکته: قدر نسبت در این دنباله‌ها از رابطه  $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$  محاسبه می‌شود. و همچنین جمله‌ی عمومی این

دنباله‌ها در حالت کلی بشكل  $a_n = aq^{n-1}$  است.

$$\text{EX)} \quad 3, 15, 75, \dots \Rightarrow q = \frac{15}{3} = 5, \quad a_n = aq^{n-1} = 3(5)^{n-1}, \quad a_{11} = 3(5)^{10}$$

نکته: اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، به  $b$  واسط هندسی  $a$  و  $c$  می‌گوییم و داریم  $b^2 = ac$ .

دانلود از سایت ریاضی سرا

(( امام علی (ع) : دانش بالاترین کاهیابی است . ))

**مسئلہ ۷:** در دبالة ...  $\frac{5}{4}$ ،  $\frac{5}{4}$  قدر نسبت و جمله ۷-ام و ۲۰-ام را مشخص کنید .



**مسئلہ ۴۳:** توپی از ارتفاع ۱۰۰ متری یک ساختمان رها می شود . این توپ هر بار که به زمین می خورد ، به اندازه هی  $\frac{1}{9}$  از ارتفاع قبلی به بالا می رود . این توپ پس از برخورد سوم با زمین ، تا چه ارتفاعی بالا می رود ؟

- (۱) ۹۰ متر      (۲) ۸۱ متر      (۳) ۷۲/۹ متر      (۴) ۶۷/۱ متر



**مسئلہ ۴۴:** در یک تھاوس هندسی صعودی جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است . جمله اول کدام است ؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$       (۲) ۵      (۳) ۲۵      (۴)  $\sqrt{5}$



**مسئلہ ۴۵:** اگر  $1 - 3x + 2x^2 + 5x^3$  سه جمله متواالی یک دبالة هندسی باشند . مجموعه مقادیر ممکن برای  $x$  کدام است ؟

- (۱)  $\{-1, -2\}$       (۲)  $\{1, -3\}$       (۳)  $\{1, 3\}$       (۴)  $\{-1, 3\}$



**مسئلہ ۴۶:** جمله‌ی بیستم از دبالة‌ی حسابی  $\dots -2, 0, 2, \dots$  با جمله‌ی چندم از دبالة‌ی هندسی  $\dots 2, 6, 18, \dots$  برابر است ؟

- (۱) چهارم      (۲) پنجم      (۳) هفتم      (۴) هشتم



**مسئلہ ۴۷:** اعداد  $2\sqrt{2}$ ،  $2^2$  و  $2^b$  سه جمله متواالی از تھاوس هندسی‌اند . واسطه عددی بین  $a$  و  $b$  کدام است ؟

- (۱)  $2/5$       (۲)  $1/5$       (۳)  $\sqrt{2}$       (۴)  $\sqrt{2}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۴۸:** اعداد ۲، ۳ و a جملات متولی از دنباله‌ی هندسی نزولی‌اند، جمله‌ی چهارم چند برابر جمله‌ی دهم آن است؟

۱۲۸ (۴)

۶۴ (۳)

۴۸ (۲)

۳۲ (۱)



**تست ۴۹:** در یک دنباله‌ی هندسی،  $t_1 = 3$  و  $t_2 = 1$  است. حاصل  $A = \frac{t_{21} + t_{23} + t_{25}}{t_{23} + t_{25} + t_{27}}$  کدام است؟

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-20}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{14}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-12}$$



**نکته:** اگر جمله‌ی  $a_m$  و  $a_n$  از یک دنباله هندسی را داشته باشیم، خواهیم داشت:



**نکته:** اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و بخواهیم بین این دو عدد n عدد دیگر بگنجانیم به طوری که

جملات حاصل یک دنباله هندسی را تشکیل دهند، خواهیم داشت:

**نکته:** اگر برای چهار عدد طبیعی داشته باشیم  $m+n=p+q$ ، در آن صورت در هر دنباله حسابی خواهیم

داشت:  $a_m a_n = a_p a_q$

**نکته:** مجموع n جمله اول از دنباله هندسی  $a_n$ ، از رابطه مقابله دست می‌آید:

**نکته:** اگر جملات m، n و k ام از یک دنباله حسابی، سه جمله متولی از یک دنباله هندسی را تشکیل دهند،

قدر نسبت دنباله هندسی از رابطه  $q = \frac{k-n}{n-m}$  به دست می‌آید.



**تخته ۸:** در یک دنباله هندسی جمله سوم و هفتم آن به ترتیب برابر ۵ و  $\frac{1}{125}$  هستند. دنباله را مشخص کنید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

**۵۱:** بین اعداد ۲ و ۱۲۸ پنج وسط هندسی بگنجانید.



اگر بین دو عدد ۷ و ۱۷۰۱، چهار وسطه هندسی درج کنیم، نسبت بزرگترین وسطه به کوچکترین

واسطه کدام است؟

۹ (۳)

۴ (۱)

۸۱ (۴)

۲۲ (۳)

**۵۲:**



جملات دوم، چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی و متمایز از یک دنباله هندسی هستند. اگر جمله اول این دنباله هندسی  $\frac{1}{4}$  باشد، جمله دهم آن کدام است؟

۹۸ (۱)

۲۱۱ (۱)

۱۲۸ (۴)

۱۱۲ (۳)

**۵۳:**



در یک دنباله هندسی با جملات افزایشی مجموع جمله چهارم و ششم برابر ۱۲۰ و مجموع جمله

پنجم و هفتم برابر ۲۴ است. جمله چهارم دنباله کدام است؟

۴۸ (۴)

۲۴ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

**۵۴:**



در یک دنباله هندسی، مجموع جملات چهارم و پنجم برابر ۷ و مجموع جملات هفتم و هشتم برابر ۵۶

است. مجموع جملات اول و سوم کدام است؟

$-\frac{25}{8} (۴)$

$\frac{17}{4} (۳)$

$\frac{22}{8} (۲)$

-۴ (۱)

**۵۵:**



در دنباله حسابی  $\dots, \frac{7}{4}, 2, \dots$ ، اگر به جملات چهارم، هشتم و سیزدهم مقداری ثابت اضافه کنیم، به

ترتیب از راست به چپ، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی حاصل می شود، قدرتیسیت دنباله هندسی کدام است؟

$\frac{5}{4} (۴)$

$\frac{4}{3} (۳)$

۲ (۲)

۲ (۱)

**۵۶:**



دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۵۵:** اگر دنباله‌ی شماره‌ی (۱) یک دنباله‌ی حسابی و دنباله‌ی شماره‌ی (۲) یک دنباله‌ی هندسی باشد، حاصل

c-b کدام است؟

$$(1): 1, a, a+b, 1+\dots, \quad (2): a, c, 1\beta, 2\gamma, \dots$$

۴ (۱)

۴ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)



**تست ۵۶:** عدد کدام گزینه، واسطه‌ی هندسی بین جمله‌های دهم و شانزدهم دنباله‌ی حسابی زیر است؟

$$4, 8, 12, \dots$$

۱۶\sqrt{10} (۱)

۸\sqrt{10} (۲)

۲۲ (۳)

۱۶ (۴)



**تست ۵۷:** حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی  $3, x, y, 24, \dots$  کدام است؟

$$2^{19} \times 2^{19} \cdot (۱)$$

$$2^{40} \times 2^{19} \cdot (۲)$$

$$3 \times 2^{19} \cdot (۳)$$

$$2^{30} \times 2^{31} \cdot (۴)$$



**تست ۵۸:** جملات ششم و نهم دنباله حسابی  $\dots, 1, 4, 7, 10, \dots$  به ترتیب جملات سوم و پنجم یک دنباله هندسی هستند. در این دنباله هندسی، جمله سیزدهم چند برابر جمله یازدهم است؟

$$\frac{4}{5} (۱)$$

$$\frac{25}{16} (۲)$$

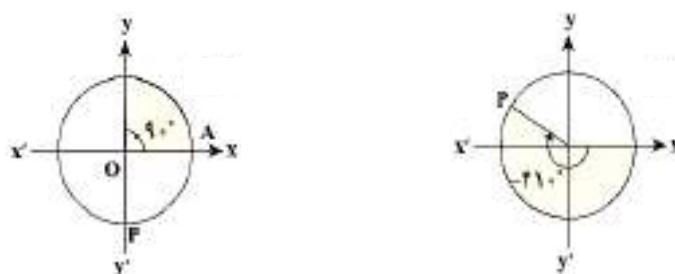
$$\frac{16}{25} (۳)$$

$$\frac{5}{4} (۴)$$

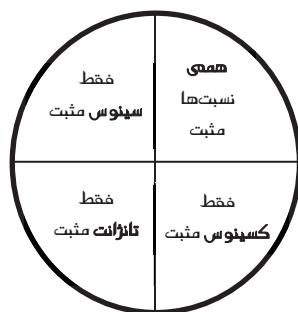




دایره مثلثاتی: دایره‌ی جهتدار به شعاع یک است که جهت مثبت آن عکس جهت حرکت عقربه‌های می‌باشد.



نکته(علامت نسبت‌های مثلثاتی): برای حفظ آسان نوادی که در آن‌ها نسبت‌های مثلثاتی مثبت‌اند، از جدول زیر و یا از قانونی به نام "هستک" استفاده می‌کنیم. به این معنی که "همه"ی نسبت‌های مثلثاتی در ناحیه اول مثبت‌اند و در ناحیه دوم فقط سینوس، در ناحیه سوم فقط تانژانت و در ناحیه چهارم فقط کسینوس مثبت است.



ربع	نسبت مثلثاتی			
	اول	دوم	سوم	چهارم
Sin $\alpha$	+	+	-	-
Cos $\alpha$	+	-	-	+
tan $\alpha$	+	-	+	-
Cot $\alpha$	+	-	+	-

۱) اول  
۲) دوم  
۳) سوم  
۴) چهارم

سته:



۱) اول  
۲) دوم  
۳) سوم  
۴) چهارم



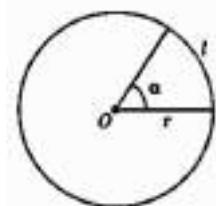
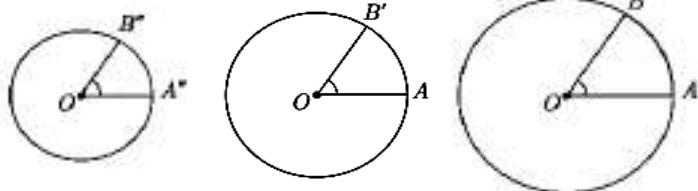
سته: اگر  $\sin\alpha \cdot \tan\alpha < 0$  و  $\cos\alpha \cdot \cot\alpha > 0$  باشد، آن‌گاه  $\theta$  در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد؟

((اهم علی)) دانش را فراگیر، پس بدرستی که اگر بینیاز باشی، تو را آرایش نهاید و اگر فقیر باشی، تو را تأمین کند. ()))



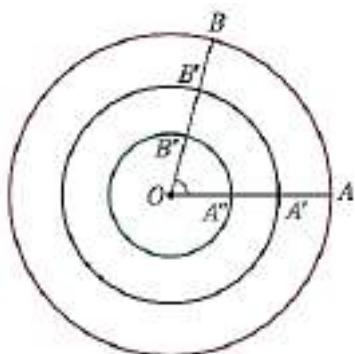
تعریف: یک رادیان (rad)، برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره‌ی که طول کمان روبروی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

مثال: در دایره‌های زیر داریم:  $\widehat{A''B''} = r''$ ,  $\widehat{A'B'} = r'$ ,  $\widehat{AB} = r$ . پس در هر سه دایره اندازه زاویه مرکزی داده شده برابر یک رادیان است.



نکته: اگر طول کمان روبروی زاویه  $r$  شعاع دایره و  $\alpha$  اندازه

$$\text{زاویه بر حسب رادیان باشد، آنگاه داریم: } \alpha = \frac{l}{r}.$$



در شکل مقابل  $\angle O = 1(\text{rad})$ ، طول کمان‌های داده شده را بیابید.

**مسئلہ:**



1	5m	4cm	
r		2.cm	7cm
$\alpha(\text{rad})$	$5(\text{rad})$		$2/5(\text{rad})$

**مسئلہ ۲:** جدول زیر را تکمیل کنید.



چه مدت زمان طول می‌کشد تا عقربه دقیقه‌شمار ساعت، به اندازه  $\frac{8\pi}{3}$  رادیان دوران کند؟



(۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه

(۱) یک ساعت

(۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

(۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه



نکته: نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با  $\pi$  نمایش می‌دهند و به آن عدد بی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد  $3\frac{1}{7}$  است.

نکته: اگر  $D$  اندازه زاویه  $\alpha$  بر حسب درجه و  $R$  اندازه این زاویه بر حسب رادیان باشد، آنگاه:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi(\text{rad})}$$

مثال: زاویه‌های  $60^\circ$ ,  $150^\circ$  را، بر حسب رادیان بباید.

$$R = \frac{\pi D}{180^\circ} = \frac{\pi(60^\circ)}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}(\text{rad}) \quad , \quad R = \frac{\pi D}{180^\circ} = \frac{\pi(150^\circ)}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6}(\text{rad})$$

مثال: زاویه‌های  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{2}{3}\pi$  رادیان را، بر حسب درجه بباید.

$$D = \frac{R \times 180^\circ}{\pi} = \frac{1 \times 180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3/14} = 57/32^\circ$$

$$D = \frac{R \times 180^\circ}{\pi} = \frac{\frac{2}{3} \times 180^\circ}{\pi} \approx \frac{120^\circ}{3/14} = 38/21^\circ$$

$$D = \frac{R \times 180^\circ}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{2} \times 180^\circ}{\pi} = 30^\circ$$

$$D = \frac{R \times 180^\circ}{\pi} = \frac{\pi \times 180^\circ}{\pi} = 180^\circ \quad , \quad D = \frac{R \times 180^\circ}{\pi} = \frac{\frac{2\pi}{3} \times 180^\circ}{\pi} = 120^\circ$$

سد مورد مثال آخر به صورت زیر نیز قابل محاسبه است:

$$\frac{\pi}{2}(\text{rad}) = \frac{180^\circ}{3} = 30^\circ \quad , \quad \pi(\text{rad}) = 180^\circ \quad , \quad \frac{2\pi}{3}(\text{rad}) = \frac{2 \times 180^\circ}{3} = 120^\circ$$

۴) چهارم

۳) سوم

۲) دوم

۱) اول



**تست ۴:** - انتهای کمان زاویه  $\frac{17\pi}{5}$  رادیان در کدام ربع دایره مثلثاتی واقع است؟

۹) ۴

۲۰) ۳

۱۸) ۲

۱۰) ۱



**تست ۵:** - زاویه  $D$  برابر  $\frac{\pi}{2}$  رادیان است. این زاویه چند درجه است؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

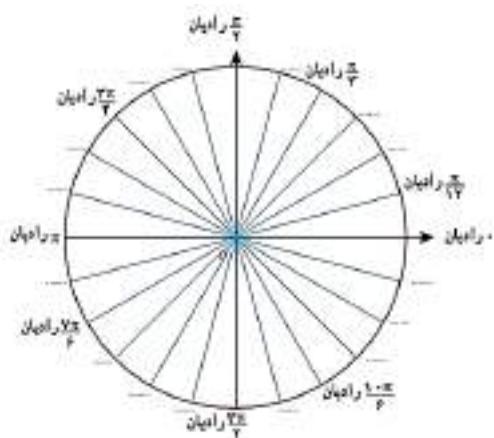
((اهم باقر(ع): از تبلیغ و بی حوصلگی پرهیز، زیرا که این دو کلید هر بدی هی باشند. ))

جدول زیر را تکمیل کنید و در دایره‌ی زیر جاهای خالی را بر حسب رادیان تکمیل کنید.

**مثال ۳:**



D (درجه)	۲۰°	۳۰°	-۴۵°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۱۵°				
R (رادیان)							$\frac{\pi}{9}$	$-\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



**مسئله ۶:** - در مثلث ABC، زاویه A برابر  $\frac{2\pi}{3}$  رادیان و زاویه B برابر ۱۵ درجه است. زاویه C چند رادیان است؟

$$\frac{\pi}{8} \quad (4)$$

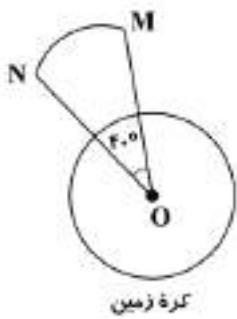
$$\frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (1)$$



**مسئله ۷:** - مطابق شکل، ماهواره‌ای در فاصله ۸۰۰ کیلومتری از سطح زمین در حال گردش روی یک مسیر دایره‌ای است. اگر این ماهواره از نقطه M به نقطه N برسد، چند کیلومتر مسافت طی کرده است؟ (شعاع کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر بگیرید).



$$1600\pi \quad (1)$$

$$2400\pi \quad (2)$$

$$1800\pi \quad (3)$$

$$2100\pi \quad (4)$$



**مسئله ۸:** - کدامیک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟ (زاویه‌ها بر حسب رادیان هستند).

$$\cos 8 \quad (4)$$

$$\cos 6 \quad (3)$$

$$\cos 4 \quad (2)$$

$$\cos 2 \quad (1)$$



((اهم صادق)) نیکی به پدر و هادر نشانه شناخت شایسته بنده خداست، زیرا هیچ عبادتی زودتر از رعایت حرمت پدر و هادر هسلمان به خاطر خدا، انسان را به رضایت خدا ننمی‌رساند. (۱۰۰)

**سوال ۹:** - طول مسیری که نوک برف‌پاک کنی به طول  $\frac{3}{\pi}$  متر پس از طی زاویه مرکزی  $40^\circ$  طی می‌کند، تقریباً چند سانتی‌متر است؟

(۲) ۶۷

(۱) ۶۰

(۴) ۵۷

(۳) ۷۶



**سوال ۱۰:** - اندازه یک زاویه بر حسب رادیان برابر با  $\frac{20\pi}{3}$  است. اندازه این زاویه بر حسب درجه کدام است؟

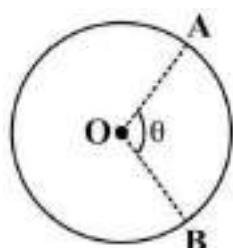


(۲) ۱۲۰۰

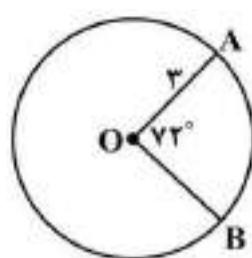
(۱) ۶۰۰

(۴) ۷۲۰

(۳) ۹۰۰



در شکل زیر، اگر شعاع دایره ۴cm و طول کمان AB برابر ۱۲cm باشد،  $\theta$  چند درجه است؟

 $\frac{360}{\pi}$  (۳) $\frac{180}{\pi}$  (۱) $\frac{720}{\pi}$  (۴) $\frac{540}{\pi}$  (۲)

در شکل زیر طول کمان رو به رو به زاویه  $72^\circ$  درجه کدام است؟ (O مرکز دایره است).

 $2\pi$  (۳)  $\pi$  (۱) $\frac{6\pi}{5}$  (۴)  $\frac{2\pi}{5}$  (۲)

**سوال ۱۲:** - تقریباً چند ساعت طول می‌کشد تا عقربه ساعت‌شمار به اندازه  $1/57$  رادیان دوران کند؟ ( $\pi \approx 3/14$ )



(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

**سوال ۱۳:** - ماهواره‌ای روی مداری دایره‌ای شکل در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در هر شب‌نیروز یک دور مسیر دایره‌ای را طی می‌کند زاویه‌ای که این



ماهواره نسبت به مرکز مسیر دایره‌ای در مدت ۵ ساعت طی می‌کند تقریباً چند رادیان است؟ ( $\pi = 3/14$ )



۱/۲ (۲)

۱ (۱)

۱/۴ (۴)

۱/۳ (۳)

دانلود از سایت ریاضی سرا

تست‌ها: - یکی از زوایای یک مثلث متساوی‌الساقین برابر  $\frac{7\pi}{12}$  رادیان است. اندازه زاویه دیگر این مثلث چند درجه است؟

۴۷/۵ (۴)

۲۵ (۳)

۴۲/۵ (۲)

۱۵ (۱)



تست‌ها: شاع چرخ جلویی تراکتوری ۱ متر و شاع چرخ عقب آن ۱۲۰ سانتی‌متر است. وقتی چرخ جلو ۷۰ درجه می‌چرخد، چرخ عقب تقریباً چند درجه خواهد چرخید؟

۵۸ (۲)

۵۶ (۱)

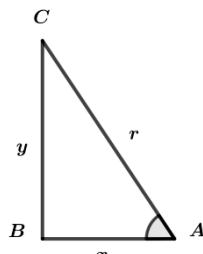
۶۸ (۴)

۶۶ (۳)



۱. علامت نسبت‌های مثلثاتی: با توجه به مطالب درس قبل داریم:

$\alpha$	${}^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$180^{\circ} < \alpha < 270^{\circ}$ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$270^{\circ} < \alpha < 360^{\circ}$ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



۵. در مورد زوایی دلخواه  $A$  از مثلث قائم الزاویه نظیر شکل مقابل داریم:

$$\sin A = \frac{y}{r}, \cos A = \frac{x}{r}, \tan A = \frac{y}{x}$$

و همچنین می‌دانیم که روابط زیر در حالت کلی برای این نسبتها برقرار است:

$$a) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1) \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ 2) \xrightarrow{+ \cos^2 \alpha} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 3) \xrightarrow{+ \sin^2 \alpha} 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$b) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, c) \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} (\tan \alpha \cot \alpha = 1)$$

نکته: در حالت کلی داریم:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin \alpha \geq 0 \\ \sin \alpha - 1 \leq 0 \end{cases}, -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos \alpha \geq 0 \\ \cos \alpha - 1 \leq 0 \end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

**مسئلہ ۴:** علامت نسبت‌های مثلثاتی خواسته شده را برای زاویه‌های داده شده را بیابید.

زاویه	$55^\circ$	$150^\circ$	$210^\circ$	$290^\circ$	$\alpha$ (rad)	$\frac{\pi}{9}$ (rad)	$\frac{2\pi}{3}$ (rad)	$\frac{5\pi}{4}$ (rad)	$\frac{5\pi}{3}$ (rad)
علامت	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cot \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\sin \alpha$	$\cot \alpha$	$\sin \alpha$

**مسئلہ ۱۷:** - علامت عبارت‌های  $\sin 82^\circ$ ,  $\cos 262^\circ$ ,  $\tan 171^\circ$ ,  $\cot 279^\circ$  به ترتیب از راست به چپ برابر است با:

(۲) مثبت- منفی - منفی - مثبت

(۱) مثبت- مثبت- مثبت - منفی

(۴) مثبت- منفی - منفی - منفی

(۳) منفی- مثبت - مثبت - مثبت

$$\text{مسئلہ ۱۸:} \quad \text{اگر } |\sin \alpha - \cos \alpha| = \frac{\sqrt{23}}{4}, \text{ حاصل کدام است؟}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$-\sqrt{2}\cos 120^\circ$$

$$\text{مسئلہ ۱۹:} \quad \text{مقدار } A = \sqrt{1 - \tau \sin x \cos x} - \sqrt{1 + \tau \sin x \cos x} \text{ بیانی } x = 200^\circ \text{ کدام است؟}$$

$$-\sqrt{2}\sin 120^\circ$$

$$\sqrt{2}\cos 120^\circ$$

$$\sqrt{2}\sin 120^\circ$$

$$\text{مسئلہ ۲۰:} \quad \text{اگر } \tan x + \cot x > 0, \text{ مقدار } \sin(\pi - x) + \cos(-x) = -\frac{4}{5}, \text{ کدام است؟}$$

$$-\frac{25}{12}$$

$$-\frac{13}{6}$$

$$-\frac{2}{3}$$

$$-\frac{25}{24}$$

**مسئلہ ۲۱:** اگر  $\sin \alpha \cos \alpha > \sin \alpha$ ,  $\cos \alpha + \cot \alpha < 0$  باشد، آنگاه انتهای زاویه  $\alpha$  در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

(۲) دوم

(۱) اول

(۴) چهارم

(۳) سوم

$$\text{مسئلہ ۲۲:} \quad \text{اگر } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{1000}, \text{ کدام رابطه صحیح است؟ (} x \text{ در ناحیه اول است).}$$

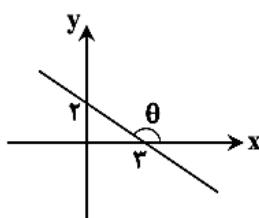
$$\tan x < 0$$

$$\tan 2x > 0$$

$$\cos 2x < 0$$

$$\sin 2x < 0$$

تست ۲۳: - اگر  $\frac{\sin^2 x}{1 + 9 \cos^2 x}$  حاصل عبارت کدام است؟

 $\frac{2}{9} (۴)$  $\frac{2}{27} (۳)$  $\frac{2}{81} (۲)$  $\frac{1}{9} (۱)$ با توجه به شکل مقابل، مقدار  $\cos \theta$  کدام است؟ $-\frac{4}{9} (۲)$  $-\frac{5}{9} (۱)$  $-\frac{3}{\sqrt{13}} (۴)$  $-\frac{2}{\sqrt{13}} (۳)$ 

## جدول مقادیر نسبت‌های مثلثاتی چند زاویه خاص:



(۱) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مهم ناحیه اول:

$\alpha$	$0^\circ = 0 \text{ (rad)}$	$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ (rad)}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ (rad)}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ (rad)}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}$
$\sin \alpha$	+	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	-
$\tan \alpha$	+	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\cot \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	+

(۲) نسبت‌های مثلثاتی راس‌های دایره:

$\alpha$	$180^\circ = \pi \text{ (rad)}$	$210^\circ = \frac{7\pi}{6} \text{ (rad)}$	$240^\circ = \pi \text{ (rad)}$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ (rad)}$	$300^\circ = 2\pi \text{ (rad)}$
$\sin \alpha$	+	1	+	-1	+
$\cos \alpha$	1	+	-1	+	1
$\tan \alpha$	+	-	+	-	+
$\cot \alpha$	-	+	-	+	-

دانلود از سایت ریاضی سرا

a)  $\sin^2 \frac{\pi}{4} + 3 \tan \frac{\pi}{6} - \cot \frac{\pi}{3} =$

, b)  $\frac{1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} =$

c)  $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \tan \frac{\pi}{4} \cot^2 \frac{\pi}{3} =$

, d)  $\tan \frac{\pi}{9} \cot \frac{\pi}{9} + \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ =$

**تست ۲۶:** اگر  $\frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{4}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت  $\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \sin \alpha - \cos \alpha}$  کدام است؟

-1 (۲)

(۱) صفر

(۴) تعریف نشده

۱ (۳)

**تست ۲۷:** مجموع چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی  $a_n = [\sin n]$  چقدر است؟ ( [ نماد جزء صحیح است.)

۱ (۴)

-1 (۳)

-2 (۲)

(۱) صفر

$\frac{1}{\sqrt{2}} < A \leq 2$  (۵)

$\frac{1}{2} \leq A \leq 1$  (۲)

$\frac{2\sqrt{2}}{2} - 1 < A \leq 2$  (۲)

$\frac{1}{2} < A < \frac{2\sqrt{2}}{2} - 1$  (۱)

$\left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$  (۵)

$\left[ \frac{\pi}{4}, \frac{5\sqrt{3}+1}{4} \right]$  (۲)

$\left[ \frac{\pi}{4}, \frac{5\sqrt{3}+2}{4} \right]$  (۲)

$\left[ \frac{\pi}{4}, \pi \right]$  (۰)

- دو نظر مطابق شکل با قدر یکسان، یک تیر چراغ برق را از نقاط A و B به ترتیب با زوایای  $30^\circ$  و  $45^\circ$  می‌بینند. اگر فاصله A تا B برابر ۱۸ متر

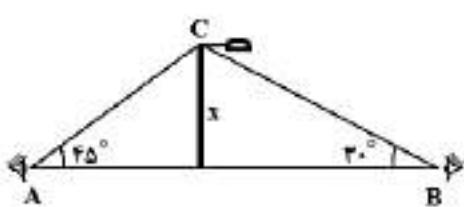
باشد، ارتفاع تیر چراغ برق (x) کدام است؟

(۱)  $18(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(۲)  $9(\sqrt{3} + 1)$

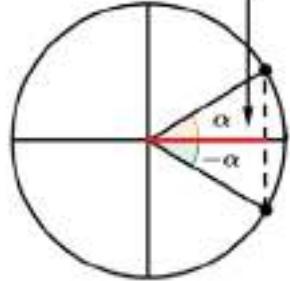
(۳)  $18(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

(۴)  $9(\sqrt{3} - 1)$



محاسبه نسبت‌های مثلثاتی خاص:۱. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه:

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

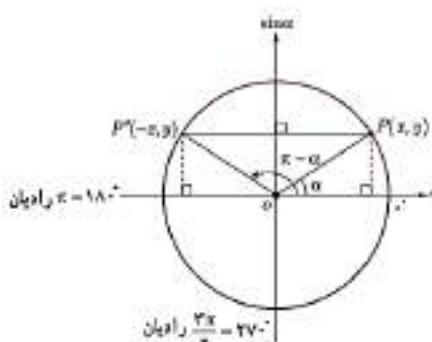


$$\Rightarrow \begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha, \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \end{aligned}$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل:

$$\Rightarrow \begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha, \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha \end{aligned}$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \tan\left(\pi - 60^\circ\right) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \cot\left(\pi - 30^\circ\right) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right), \quad \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

(( خداوند سبان هیفرهایند: ای داودا من پنج چیز را در پنج چیز قرار دادم ولی هردم در جاهای دیگر هیچ‌جویند و نهی‌یابند: ))

**تست ۱:** - حاصل عبارت  $A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{11\pi}{9}$  کدام است؟

$\frac{3}{2}$  (۴)

$\frac{5}{2}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

(۱) صفر



**تست ۲:** - محمود برای محاسبه مقدار  $\cot(-120^\circ)$  به صورت زیر عمل کرده است. در کدام مرحله او مرتکب اشتباه شده است؟

$$\cot(-120^\circ) \stackrel{(1)}{=} -\cot(120^\circ) \stackrel{(2)}{=} -\cot(180^\circ - 60^\circ) \stackrel{(3)}{=} -\cot 60^\circ \stackrel{(4)}{=} -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



**تست ۳:** - اگر  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$  و  $\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{4}$  باشد، مقدار  $\sin x + \cos x$  کدام است؟

$-\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۱)



**تست ۴:** - مقدار  $1 - 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  با کدام عبارت زیر برابر است؟

$-\sin 240^\circ$  (۴)

$\cos 240^\circ$  (۳)

$-\sin 210^\circ$  (۲)

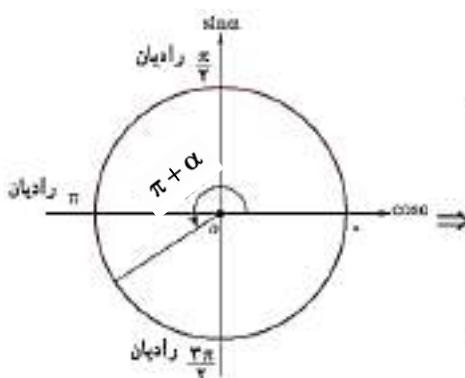
$\cos 210^\circ$  (۱)



((ا. هن علم و دانش را درگرسنگی و تلاش فراوان قرار داده‌ام، هردم آن را در سیری و راحتی جستجو می‌کنم و نمی‌یابند.))



### ۳. نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\pi$ را دریابی:



$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha & \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

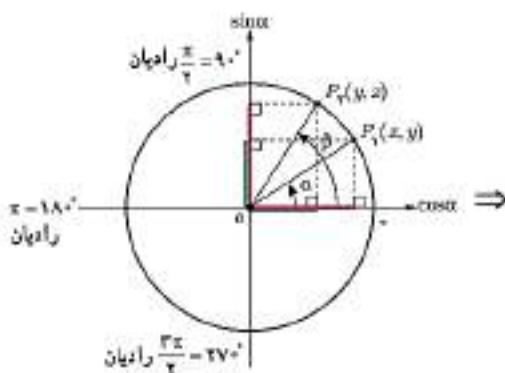
مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cot\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cot\left(\pi + 45^\circ\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cot 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \times -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

### ۴. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم:



$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha \end{aligned}$$

نکته: اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  باشد، آنگاه داریم:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta, \tan \alpha = \cot \beta, \cot \alpha = \tan \beta$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 30^\circ\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\tan 60^\circ = \cot, \sin 18^\circ = \cos$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۵:** اگر  $\frac{a \sin \frac{2\pi}{3} + b \cos \frac{5\pi}{6}}{a \sin \frac{5\pi}{6} + b \cos \frac{5\pi}{3}} = \tan \frac{11\pi}{6}$  باشد،  $\frac{a}{b}$  کدام است؟

-۲ (۴)

$-\frac{1}{2}$  (۳)

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)



**تست ۶:** مقدار عبارت  $\alpha = \frac{\pi}{20}$  به ازای  $\sqrt{2} \sin 15\alpha + \frac{\tan 4\alpha}{\cot 6\alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{\cos 7\alpha}$  کدام است؟

۳ (۴)

$2 + \sqrt{2}$  (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



**تست ۷:** چند مقدار برای  $x$  در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی یافت می‌شود که در رابطه‌ی  $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(x - \frac{5\pi}{12})$  صدق کند؟

(۱) بی‌شمار

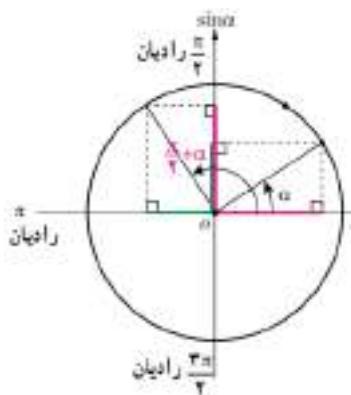
۲ (۲)

۲) صفر

۱ (۱)



**۸. نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف  $\frac{\pi}{2}$  رادیان:**



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha \end{cases}$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 30^\circ\right) =$$

$$, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\tan 90^\circ = \quad = -\cot$$

$$, \sin 120^\circ = \quad = \cos$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$, \cot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

(( ۲- هن عزت و افتخار را در عمل به دستورات و فرامین قرار داده‌ام، ولی هردم آن را در خدمتگذاری به ستمگران جستجو هیکنند و هرگز نهی‌یابند. ))

**تست ۸:** اگر  $\tan x = -\frac{3}{4}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم باشد، حاصل  $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$  کدام است؟

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{5}$$

$$-\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{5}$$

$$-\frac{4}{5}$$



**تست ۹:** حاصل عبارت  $A = \frac{\cos^2(25^\circ + x) + \cos^2(65^\circ - x)}{\cot(25^\circ + x) \cdot \cot(x + 115^\circ)}$  کدام است؟

$$4) صفر$$

$$-1) ۳$$

$$2) ۲$$

$$1) ۱$$



**تست ۱۰:** اگر  $x$  و  $y$  دو زاویه حاده باشند و  $A = \tan(\delta x + \gamma y) \times \tan(\gamma x + \delta y)$  حاصل عبارت  $x + y = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

$$-1) ۴$$

$$\tan^2 x \quad ۳$$

$$-\tan^2 x \quad ۲$$

$$1) ۱$$



**تست ۱۱:** اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$  باشد، آنگاه حاصل عبارت  $A = \frac{\sin(2\alpha + 3\beta)}{\cos(4\alpha + 5\beta)}$  در صورت تعریف شدن کدام است؟

$$\tan \beta \quad ۲$$

$$\tan \alpha \quad ۱$$

$$1) ۳$$

**تست ۱۲:** اگر  $A = \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{7\pi}{2} + \alpha) + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$  باشد، حاصل  $-5\pi < \alpha < -\frac{9\pi}{2}$  و  $\cot \alpha = \frac{4}{3}$  کدام است؟

$$-0/۶۸ \quad ۴$$

$$-0/۲۸ \quad ۳$$

$$0/۶۸ \quad ۲$$

$$0/۲۸ \quad ۱$$



۳. هن بینایی را در قناعت قرار دادم و هردم آن را در زیادی ثروت جستجو می‌کنم و هرگز نمی‌یابند. ( ))

**مسئله ۱۳:** حاصل عبارت  $\frac{\cos \delta^\circ + \cos 15^\circ + \cos 165^\circ + \cos 255^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ + \cos 180^\circ + \cos 270^\circ}$  کدام است؟

-۱ (۲)

۱ (۰)

 $-\tan \delta^\circ$  (۴) $\tan \delta^\circ$  (۵)

**مسئله ۱۴:** اگر  $\tan x = -\frac{1}{3}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \sin(\pi + x)}{\cos(-x)}$  کدام است؟

 $\frac{1-3\sqrt{10}}{3}$  (۴) $\frac{3\sqrt{10}-1}{3}$  (۳) $1-3\sqrt{10}$  (۲) $-\sqrt{10}$  (۱)

**مسئله ۱۵:** حاصل عبارت  $A = 2\sin^2(225^\circ) + 4\sin^2(300^\circ) - \frac{\cos(570^\circ)}{\cos(390^\circ)} - \tan(135^\circ)$  کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)



**مسئله ۱۶:** مقدار عبارت  $\frac{\sin 200^\circ + \cos 290^\circ - \sin 340^\circ + \cos 430^\circ}{\cos \frac{10\pi}{9} - \sin \frac{11\pi}{18}}$  کدام است؟

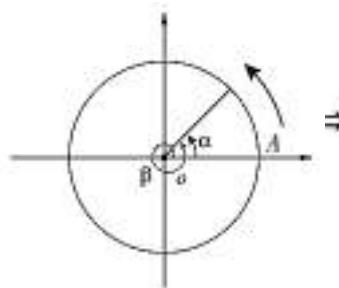
 $-\tan 20^\circ$  (۲) $\tan 20^\circ$  (۱) $-\cot 20^\circ$  (۴) $\cot 20^\circ$  (۳)

**مسئله ۱۷:** اگر  $(\frac{\pi}{2} + x)$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه سوم باشد، حاصل  $\cot(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{1}{\sqrt{15}} + \sin(\pi - x)$  کدام است؟

 $-\frac{1}{\sqrt{15}}$  (۲) $\frac{1}{\sqrt{15}}$  (۱) $-\sqrt{15}$  (۴) $\sqrt{15}$  (۳)

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی خاص:۶. نسبت‌های مثلثاتی زوایایی با مجموع یا تفاضل  $k\pi$  رادیان (مضارب زوج  $\pi$  رادیان):

دو زاویه را هم انتهای اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود. مثلاً دو زاویه  $5^\circ$ ,  $365^\circ$  و یا دو زاویه  $40^\circ$ ,  $280^\circ$  هم انتهای هستند. منظور از زاویه‌های  $2k\pi + \alpha$  رادیان، زاویه‌های هم انتهای  $4\pi + \alpha$ ,  $2\pi + \alpha$ ,  $\alpha$  هستند و منظور از زاویه‌های  $2k\pi - \alpha$  رادیان، زاویه‌های هم انتهای  $4\pi - \alpha$ ,  $2\pi - \alpha$ ,  $-\alpha$  هستند. داریم:



$$\Rightarrow \begin{aligned} \sin(2k\pi + \alpha) &= \sin \alpha & \cos(2k\pi + \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(2k\pi + \alpha) &= \tan \alpha & \cot(2k\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

و همچنان داریم:

$$\sin(2k\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(2k\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(2k\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\sin(390^\circ) = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{25\pi}{4} = \cos\frac{24\pi + \pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot(-375^\circ) = -\cot(330^\circ + 45^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{9\pi}{4} = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

((4. من رضای خودم را در سختی و ناراحتی نفس اهاره قرار دادم ولی مردم آن را در جلب رضایت نفس اهاره جستجو می‌کنند و هرگز نمی‌یابند. ))

**مشکل:** حاصل را بیابید.

$$\cos \frac{5\pi}{3} =$$

$$, \cot \frac{5\pi}{3} =$$

$$\sin \frac{13\pi}{2} =$$

$$, \cot \frac{15\pi}{4} =$$

$3m + 4$  (۴)

$3m - 4$  (۳)

$-3m - 4$  (۲)

$-3m + 4$  (۱)



**مسئلہ ۱۸:** - اگر  $A = \frac{3\sin(187^\circ) + 4\cos(727^\circ)}{2\sin(97^\circ) + 3\cos(173^\circ)}$  بر حسب  $m$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{4}$$
 (۴)

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}$$
 (۳)

$$-\frac{\sqrt{6}}{4}$$
 (۲)

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$
 (۱)



**مسئلہ ۱۹:** - حاصل عبارت  $A = (\sin 40.5^\circ)(\cos \frac{-7\pi}{3})$  کدام است؟

$$-1/3$$
 (۴)

$$-1/76$$
 (۳)

$$-3/64$$
 (۲)

$$1/76$$
 (۱)



**مسئلہ ۲۰:** اگر  $\sin 70^\circ \approx 0.94$  و  $\cos 70^\circ \approx 0.34$  باشد، آنگاه حاصل  $(\cos 200^\circ + \tan 340^\circ) / 34$  تقریباً کدام است؟

۴) بی شمار

۵) ۰

۶) یک

۷) صفر



نمودار دو تابع  $y = \sin(x - 8\pi)$  و  $y = 1 - x$  در چند نقطه متقاطع اند؟

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \pi - \sin \theta \quad (۲)$$

$$\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0 \quad (۱)$$

$$\cos(\pi + \theta) + \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = 0 \quad (۴)$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{2} - \theta) + \cos^2 \theta = 1 \quad (۳)$$



**مسئلہ ۲۲:** برای زاویه دلخواه  $\theta$ ، کدام رابطه صحیح نیست؟

تست: ۲۳- اگر  $\tan 50^\circ = \frac{6}{5}$  باشد، حاصل کدام است؟

$$\frac{-2\sin 310^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ - 2\cos 220^\circ}$$

$\frac{16}{15}$  (۴)

$\frac{17}{18}$  (۳)

$\frac{17}{6}$  (۲)

$-\frac{17}{6}$  (۱)



تست: ۲۴- اگر  $A = \frac{\sqrt{3}\sin 72^\circ + \cos 18^\circ}{\sqrt{3}\sin 288^\circ + \cos 72^\circ}$  باشد، حاصل عبارت  $\tan 18^\circ = a$  برحسب a کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}-a}{a+\sqrt{3}}$  (۴)

$\frac{a+\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}}$  (۳)

$\frac{\sqrt{3}-a}{a-\sqrt{3}}$  (۲)

$\frac{a-\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}}$  (۱)



تست: ۲۵- حاصل عبارت  $A = \tan \frac{\pi}{11} + \tan \frac{7\pi}{11} + \tan \frac{13\pi}{11} + \tan \frac{19\pi}{11}$  کدام است؟

$\sqrt{3}(\tan \frac{\pi}{11} + \tan \frac{7\pi}{11})$  (۴)

$\sqrt{3}\tan \frac{7\pi}{11}$  (۳)

$\sqrt{3}\tan \frac{\pi}{11}$  (۲)

(۱) صفر



تست: ۲۶- اگر  $\alpha$  زاویه‌ای باشد که خط  $y = \sqrt{6}x - 2$  با جهت مثبت محور x‌ها تشکیل می‌دهد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = \frac{\sqrt{3}\sin(\frac{15\pi}{4}) - \cos(\frac{23\pi}{4}) - 2\cos(\frac{13\pi}{4} - \frac{\pi}{6})}{\tan(\frac{15\pi}{4} - \alpha)}$$

$-\frac{\sqrt{3}}{6}$  (۴)

$\frac{6-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$  (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{6}$  (۲)

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$  (۱)



### رابطه سینوس‌ها:

این رابطه برای محاسبی مساحت مثلث دلخواه و همچنین رابطه بین زاویه‌ها و اضلاع مثلث دلخواه می‌باشد.  
داریم:



$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

((۵. هن راحتی و آسایش حقیقی و کاهل را در بهشت قرار داده‌ام ولی هردم آن را در دنیا جستجو می‌کنم و هرگز نخواهند یافت. ))

**مثال ۲:** مساحت یک مثلث متساوی‌الساقین که طول ساق‌های آن برابر ۴ و زاویه بین آن‌ها برابر ۴۵ درجه است را بباید.



(۴) بی‌شمار

**تست ۲۷:** چند مثلث با اضلاع  $a = 1$  و  $b = 2$  وجود دارد که مساحت آن‌ها  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  باشد؟

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۰) صفر



۴۰ (۴)

۲۴ (۳)

۲۰ (۲)

۱۲ (۱)



**تست ۲۸:** - در مثلث ABC اگر  $\hat{A} = 60^\circ$ ،  $AB = 8$  و  $AC = 10$ ، مساحت چند برابر  $\sqrt{3}$  است؟

- یک بالن اطلاع رسانی مطابق شکل زیر توسط دو طناب به طول‌های ۳۲ و ۳۶ متر به زمین بسته شده است. مقدار سینوس زاویه  $\alpha$  تقریباً

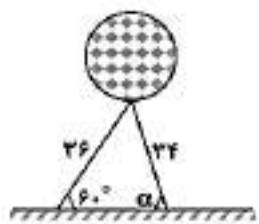
کدام است؟  $(\sqrt{3} = 1/\sqrt{2})$

۰/۸۵ (۱)

۰/۸۷ (۲)

۰/۸۸ (۳)

۰/۹ (۴)



**تست ۲۹:**



### رابطه بین شب و زاویه بین خط با محور طولها:

شب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر  $\alpha$  زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:  $m = \tan \alpha$ .



**مثال ۳:** معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور Xها  $30^\circ$  است و از نقطه (-۲, ۱) می‌گذرد.



**تست ۳۰:** خط  $2x - y = 2$  با جهت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $\theta$  می‌سازد.  $\sin \theta$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$



**تست ۳۱:** خطی که زاویه آن با جهت مثبت محور  $x$  ها  $45^\circ$  بوده و از نقطه  $(3, 2)$  عبور کند، محور  $y$  را با چه عرضی قطع می‌کند؟

(4) صفر

5 (3)

-1 (2)

1 (1)



**تست ۳۲:** خط  $d$  با شیب مثبت، خط  $1 = y$  را در نقطه‌ای به طول  $\sqrt{3}$  قطع می‌کند. اگر زاویه بین این دو خط  $60^\circ$  باشد، معادله خط  $d$  کدام است؟

$$y = \sqrt{3}x - 2 \quad (4)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2}{3} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{3}x \quad (2)$$

$$y = \sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$



**تست ۳۳:** اگر خط  $x + 1 = y$  را حول محل تقاطع آن با محور طول‌ها  $15^\circ$  در جهت مثبت مثلثاتی دوران دهیم، معادله خط بدست آمده کدام است؟

$$y = \sqrt{3}x + 1 \quad (4)$$

$$2y = \sqrt{3}x + 1 \quad (3)$$

$$y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$2y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \quad (1)$$



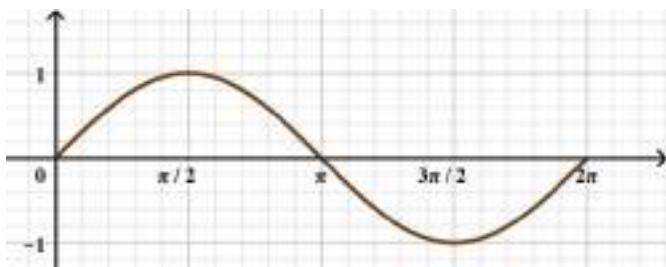


## ۱. رسم توابع سینوسی:

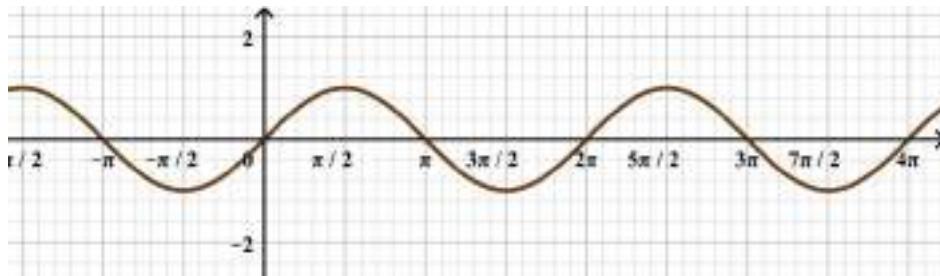
الف) رسم تابع  $y = \sin x$ : میدانیم جدول مقادیر مثلثاتی مربوط به تابع  $y = \sin x$  به صورت زیر است:

$\alpha$	${}^{\circ} = .(\text{rad})$	$45^{\circ} = \frac{\pi}{4}(\text{rad})$	$90^{\circ} = \frac{\pi}{2}(\text{rad})$	$135^{\circ} = \frac{3\pi}{4}(\text{rad})$	$180^{\circ} = \pi(\text{rad})$	$225^{\circ} = \frac{5\pi}{4}(\text{rad})$	$270^{\circ} = \frac{3\pi}{2}(\text{rad})$	$315^{\circ} = \frac{7\pi}{4}(\text{rad})$
$\sin \alpha$	+	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۰	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-۱
$\alpha$	${}^{\circ} = .(\text{rad})$	$45^{\circ} = \frac{\pi}{4}(\text{rad})$	$90^{\circ} = \frac{\pi}{2}(\text{rad})$	$135^{\circ} = \frac{3\pi}{4}(\text{rad})$	$180^{\circ} = \pi(\text{rad})$	$225^{\circ} = \frac{5\pi}{4}(\text{rad})$	$270^{\circ} = \frac{3\pi}{2}(\text{rad})$	$315^{\circ} = \frac{7\pi}{4}(\text{rad})$
$\sin \alpha$	+	۱	۰	-۱	-۰	۰	۱	۰

با توجه به این جدول، نمودار تابع  $y = \sin x$  در بازی  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر است:



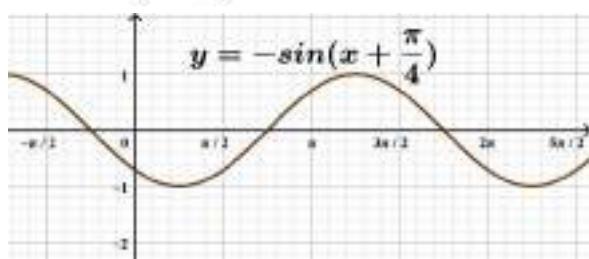
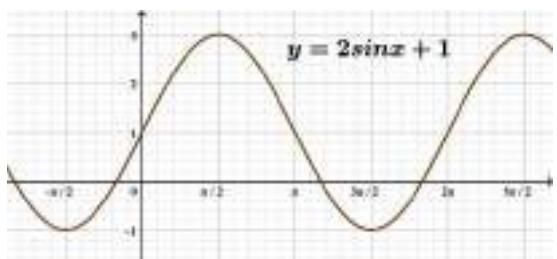
از طرفی در درس قبل دیدیم که:  $D_{\sin x} = \mathbb{R}$ ، و از همچنین میدانیم  $\sin(\pi k + \alpha) = \sin \alpha$ ، پس نمودار فوق به طور متناوب ادامه دارد.



نکته: داریم:  $D_{\sin x} = \mathbb{R}$  ،  $R_{\sin x} = [-1, 1]$

ب) رسم تابع  $y = a \sin(x+b)+c$ : برای رسم این توابع، ابتدا تابع  $y = \sin x$  را رسم می‌کنیم، سپس عرض نقاط را در عدد  $a$  ضرب و با عدد  $c$  جمع می‌کنیم، سپس تابع را  $b$  واحد به چپ یا راست (برعکس علامت  $b$ ) جابجا می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع  $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ،  $y = 2\sin x + 1$  را رسم کنید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

(( امام رضا )): هر کس به خدا خوشگهان باشد، خداوند مطابق گهان او، با وی رفتار هیکند. ( ))

نکته: اگر  $f(x) = a \sin(x + b) + c$

نتیجه: برای یافتن مقداری‌های  $a$  و  $c$  داریم:

$$\begin{aligned} \max(f) &= |a| + c \\ \min(f) &= -|a| + c \end{aligned} \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}(\max(f) - \min(f)) \quad , c = \frac{1}{2}(\max(f) + \min(f))$$



نمودار تابع  $f$  را روی محور  $y$ ها یک واحد به سمت بالا منتقل می‌دهیم و سپس آن را روی محور  $x$ ها به اندازه  $\frac{\pi}{3}$  به سمت چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه

تابع در این صورت  $y = \sin x$  خواهد شد. مقدار  $(\frac{\pi}{3}) f$  کدام است؟

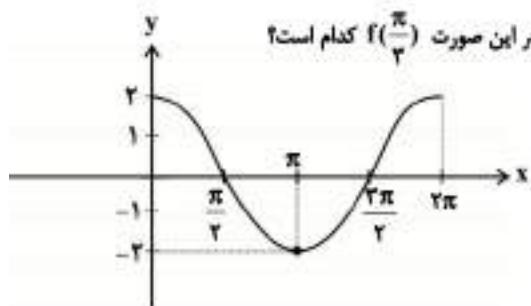
-  $\frac{3}{2}$  (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

-  $\frac{1}{2}$  (۱)

سته:



سته:



نمودار تابع  $f(x) = a \sin(x + b)$  به صورت زیر است. اگر  $f(\frac{\pi}{3})$  کدام است؟

۱ (۱)

$\frac{1}{2}$  (۲)

-  $\frac{1}{2}$  (۳)

$\sqrt{2}$  (۴)

اگر کمترین و بیشترین مقدار تابع  $y = a + b \sin x$  به ترتیب برابر ۳ و ۷ باشند، حاصل  $2a + b$  کدام است؟ ( $b > 0$ )

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)



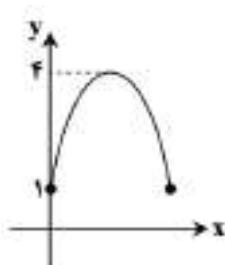
سته:



نمودار تابع  $f(x) = a \sin x + b$  در بازه  $[0, \pi]$  به شکل مقابل است. مقدار  $a^2 + b^2$  کدام است؟

۵ (۳) ۱۰ (۱)

۱۳ (۴) ۲ (۲)



سته:



دانلود از سایت ریاضی سرا

تست ۵

حداقل مقدار تابع  $y = \sin x$  در نقاطی به طول  $x = \dots$  به دست می‌آید. ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$2k\pi + \frac{3\pi}{2}$  (۴)

$2k\pi + \pi$  (۳)

$2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۲)

$2k\pi$  (۱)



تست ۶

نمودار تابع  $y = \sin x$  بر نمودار کدامیک از توابع زیر منطبق است؟

$y = \cos(\pi - x)$  (۴)

$y = -\sin(\frac{\pi}{2} - x)$  (۳)

$y = -\cos(\frac{\pi}{2} + x)$  (۲)

$y = \sin(x - \pi)$  (۱)



تست ۷

نمودار دو تابع  $f(x) = \sin x - 1$  و  $g(x) = -2$  در بازه  $[-2\pi, 2\pi]$  در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۴ (۴)

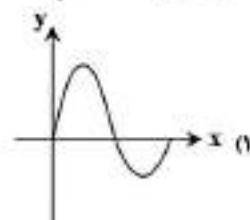
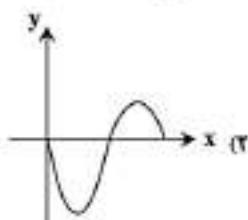
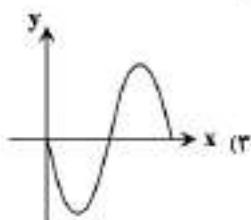
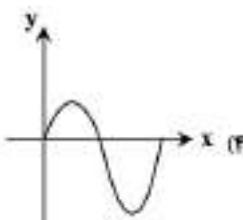
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

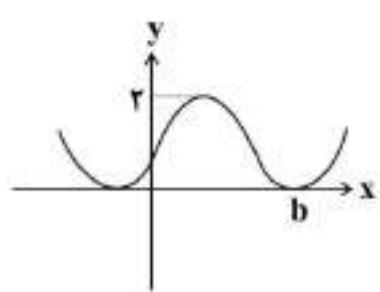


تست ۸

نمودار تابع  $f(x) = \frac{\pi \sin x + |\sin x|}{\pi}$  در بازه  $[-\pi, 2\pi]$  به کدام شکل است؟

تست ۹

تست ۱۰



$\frac{\pi}{4}$  (۴)

$\frac{3\pi}{4}$  (۳)

$\frac{3\pi}{4}$  (۱)

$\frac{7\pi}{4}$  (۳)

تست ۱۱

تست ۱۲

اگر بخشی از نمودار تابع  $f(x) = a - \sin(x + \frac{\pi}{4})$  به صورت زیر باشد. a,b کدام است؟

-۳ (۲)

-۴ (۱)

-۱ (۴)

-۲ (۳)

تست ۱۳

دانلود از سایت ریاضی سرا

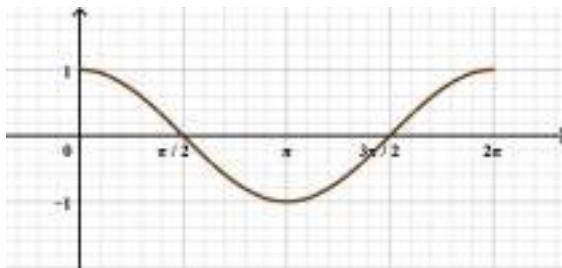
## ۵. رسم توابع کسینوسی:



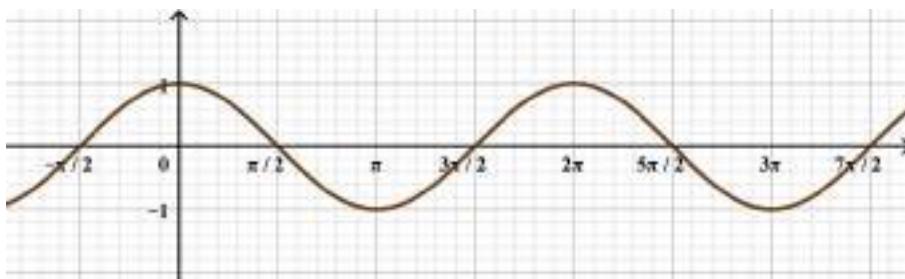
(الف) رسم تابع  $y = \cos x$ : می‌دانیم جدول مقادیر مثلثاتی مربوط به تابع  $y = \cos x$  به صورت زیر است:

$\alpha$	${}^{\circ} = \cdot(\text{rad})$	$20^{\circ} = \frac{\pi}{9}(\text{rad})$	$45^{\circ} = \frac{\pi}{4}(\text{rad})$	$60^{\circ} = \frac{\pi}{3}(\text{rad})$	$90^{\circ} = \frac{\pi}{2}(\text{rad})$
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
$\alpha$	${}^{\circ} = \cdot(\text{rad})$	$40^{\circ} = \frac{\pi}{6}(\text{rad})$	$180^{\circ} = \pi(\text{rad})$	$220^{\circ} = \frac{11\pi}{6}(\text{rad})$	$240^{\circ} = 2\pi(\text{rad})$
$\cos \alpha$	۱	۰	-۱	۰	۱

با توجه به این جدول، نمودار تابع  $y = \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت زیر است:



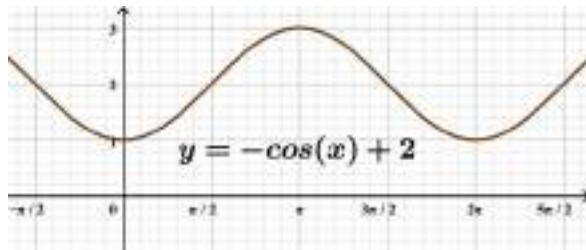
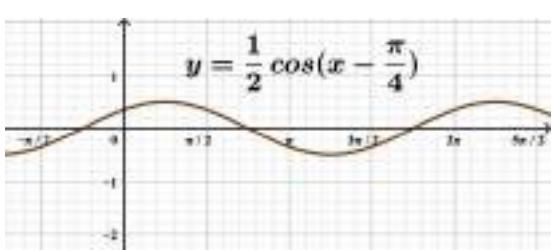
از طرفی در درس قبل دیدیم که:  $D_{\cos x} = \mathbb{R}$ ,  $R_{\cos x} = \mathbb{R}$ ، و از همچنین می‌دانیم  $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$ ، پس نمودار فوق به طور متناوب ادامه دارد.



.  $D_{\cos x} = \mathbb{R}$  ،  $R_{\cos x} = [-1, 1]$  داریم؛

(ب) رسم تابع  $y = a \cos(x+b)+c$ : برای رسم این توابع ابتدا تابع  $y = \cos x$  را رسم می‌کنیم، سپس عرض نقاط را در عدد  $a$  ضرب و با عدد  $c$  جمع می‌کنیم، سپس تابع را  $b$  واحد به چپ یا راست (برعکس علامت  $b$ ) جایجا می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع  $y = -\cos x + 2$ ،  $y = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  را رسم کنید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

((اهم رضا)) : هیچ بندمای حقیقت ایحان را به کمال نهیرساند مگر این که در او سه خصلت باشد: دین‌شناسی، برنامه‌ریزی درست در زندگی، و شکلیابی در مصیت‌ها.

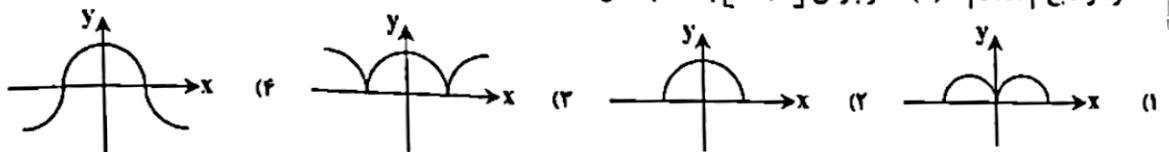
نکته: اگر  $f(x) = a \cos(x+b)+c$  آنگاه  $\min(f) = -|a|+c$ ,  $\max(f) = |a|+c$

نتیجه: برای یافتن مقداری‌های  $a$  و  $c$  داریم:

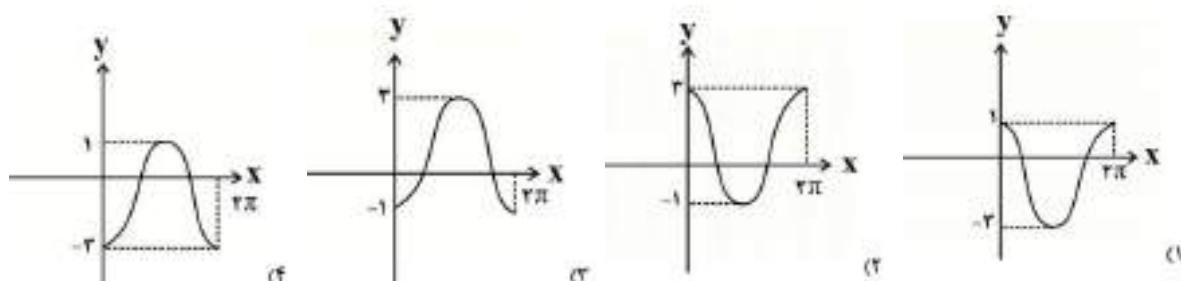
$$\begin{cases} \max(f) = |a| + c \\ \min(f) = -|a| + c \end{cases} \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}(\max(f) - \min(f)), c = \frac{1}{2}(\max(f) + \min(f))$$



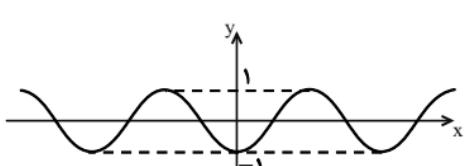
تست ۱۳: نمودار تابع  $f(x) = |\cos x|$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  به کدام شکل است؟



تست ۱۴: نمودار تابع  $y = -2 \cos x + 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟



تست‌ها: کدام تابع با ضابطه زیر، نمایش نموداری شکل مقابل نیست؟



$$y = \cos(4x) \quad (۱)$$

$$y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \quad (۲)$$

$$y = \sin\left(\frac{\Delta\pi}{2} + x\right) \quad (۳)$$



تست ۱۵: تابع  $f(x) = a + b \cos x$  در بازه  $[\pi, 2\pi]$  دارای بیشترین مقدار  $\frac{5\pi}{3}$  و دارای کمترین مقدار  $\frac{1}{2}$  است. در این صورت  $(b > 0)$   $f$  کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۴)$$



(((( رهز موفقیت، پلیندی به هدف در زندگی است. ))))

در تابع با ضابطه  $f(x) = a \cos x + b$ ، اختلاف حداقل و حداقل تابع ۶ است و مقدار تابع  $f$  در بازه  $(\frac{\pi}{3}, 0)$  افزایش می‌باشد. اگر  $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$  باشد،

تست ۱۷

b کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



تست ۱۸: - نمودار تابع  $y = 1 - \cos(x - \frac{\pi}{6})$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند بار به محور X ها برخورد می‌کند؟

۳ (۴)

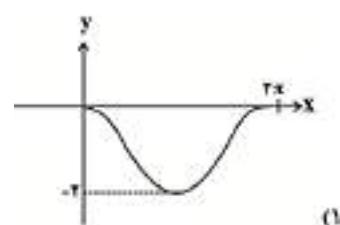
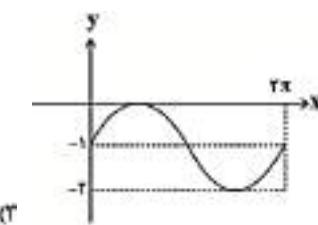
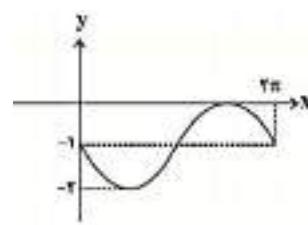
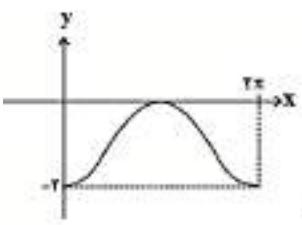
۳ صفر

۱ (۲)

۲ (۱)



تست ۱۹: بخشی از نمودار تابع  $y = \sin(\frac{7\pi}{2} + x) - 1$  شبیه کدام است؟



تست ۱۹



تست ۲۰: نمودار تابع  $y = a \cos(x - \frac{\pi}{3}) + b$  همواره زیر محور X ها قرار دارد و بیشترین مقدار تابع برابر با صفر است. اگر این نمودار از نقطه  $(-\frac{5\pi}{3}, -1)$  عبور کند، مقدار تابع به ازای  $x = -\pi$  کدام است؟ ( $a < 0$ )

تست ۲۰

۱) صفر

-۱ (۲)

- $\frac{1}{4}$  (۴)- $\frac{3}{2}$  (۳)



تعریف رابطه: به هر مجموعه از زوج‌های مرتب، یک رابطه می‌گوییم.

$$\text{EX)} \quad R = \{(1, 2), (1, 5), (-2, 4)\} \quad , \quad R = \{(1, 2), (0, 2), (2, 2)\}$$

تعریف تابع: به هر رابطه‌ای که هیچ دو زوج آن مولفه‌ی اول برابر نداشته باشد، تابع می‌گوییم.

$$\text{EX)} \quad f = \{(-2, 2), (4, 2), (1, 2)\} \quad , \quad g = \{(-2, 2), (2, 2), (5, 2)\}$$

نکته: در هر تابع، مجموعه مولفه‌های اول دامنه و مجموعه مولفه‌های دوم برد تابع را تشکیل می‌دهند.

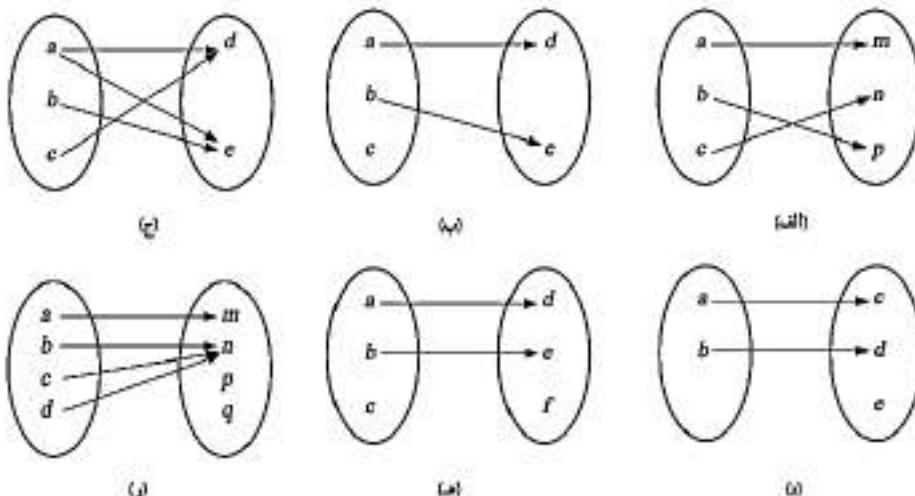
$$\text{EX)} \quad D_f = \{0, 1, 4\}, R_f = \{2\} \quad , \quad D_g = \{-2, 2, 5\}, R_g = \{2, 5, 7\}$$

نکته: یک رابطه تابع است هرگاه در نمودار ون آن، از هر عضو از مجموعه اول دقیقاً یک فلاش خارج شود.

نکته: یک رابطه تابع است هرگاه در نمودار آن، هر خطی که موازی محور  $y$  ها رسم شود، تابع را حداقل در یک نقطه قطع کند.

نکته: تصویر تابع بر محور  $x$  دامنه تابع و تصویر تابع بر محور  $y$  ها برد تابع را تشکیل می‌دهد.

**کدام یک تابع است؟**



**کدام**



**ستاد:** کدام تابع وجود ندارد؟

- (1) تابعی که دامنه آن سه عضوی و برد آن دو عضوی باشد.  
 (2) تابعی که دامنه آن سه عضوی و برد آن با هم برابر باشد.  
 (3) تابعی که دامنه آن نامتناهی و برد آن سه عضوی باشد.

**ستاد:**



- کدام یک از روابط زیر، یک تابع را مشخص می‌کند?  
 ۱) رابطه‌ای که به هر شرکت، کارمند آن شرکت را نسبت می‌دهد.  
 ۲) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، معلم او را نسبت می‌دهد.  
 ۳) رابطه‌ای که به هر ایرانی، کد ملی او را نسبت می‌دهد.

**ستاد:**



**ستاد:** کدام یک از خطوط زیر یک تابع نیست؟

$$y = 2 \quad (4)$$

$$x = 2 \quad (3)$$

$$x = 2y - 1 \quad (2)$$

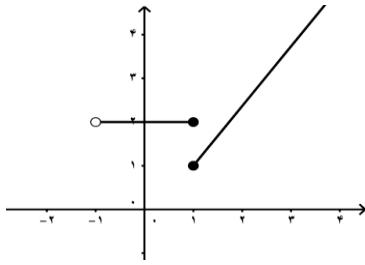
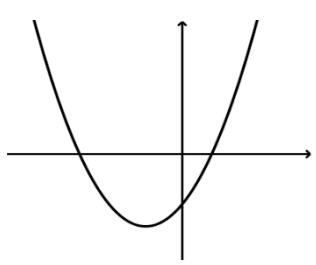
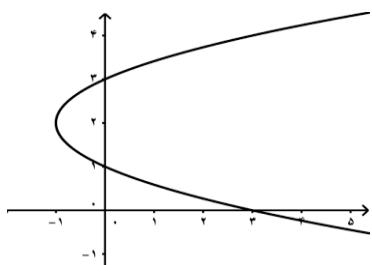
$$y = 2x + 1 \quad (1)$$

**ستاد:**



(()) به یاد داشته باش که برای موفقیت، بیش از هر چیز به اراده و تصریح نیاز داری. (())

**مثال ۲:** کدام یک تابع است؟



**مسئلہ ۴:** رابطہ  $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$ ، یک تابع است؟

۴) هیچ مقدار  $m$

۲)  $3$

-۱)  $2$

-۲)  $1$



**مسئلہ ۵:** - به ازای کدام مقدار  $m$ ، رابطہ  $f = \{(0, 5), (5, m), (5, 0), (m^2 - 2m, 4)\}$  تابع است؟

۴) هیچ مقدار  $m$

$m = 0$  (۳)

$m = 2$  (۲)

$m = 1$  (۱)



**مسئلہ ۶:** اگر رابطہ  $f = \{(2, 3), (a, 5), (3, b)\}$  تابع نباشد، اعداد  $a$  و  $b$  کدام می توانند باشد؟

$a = 1$  ،  $b = 2$  (۴)

$a = 3$  ،  $b = 6$  (۳)

$a = 1$  ،  $b = 3$  (۲)

$a = 3$  ،  $b = 5$  (۱)



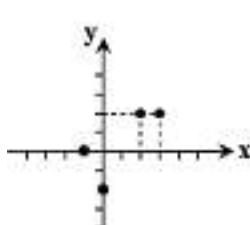
**مسئلہ ۷:** - ضابطہ تابع  $f$  با دامنه  $\mathbb{R}$  به صورت  $y = f(x+3) = x^3 - 6x + 8$  است. حاصل ضرب صفرهای تابع  $y = f(x+3)$  کدام است؟

$-\frac{1}{2}$  (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

۰) صفر



**مسئلہ ۸:** اگر نمودار تابع  $f$  به شکل مقابل باشد، دامنه و برد  $f$  کدام است؟

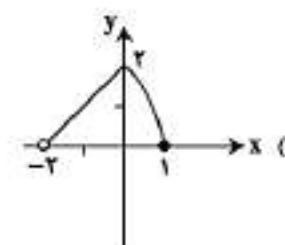
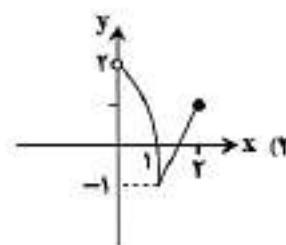
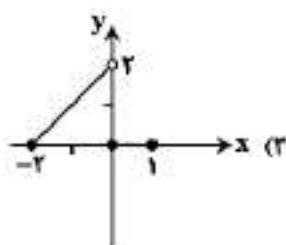
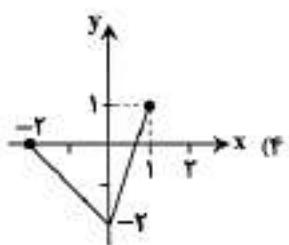
$R_f = \{-\pi, 0, \pi\}$  ،  $D_f = \{-1, 0, 1, \pi\}$  (۱)

$R_f = \{-1, 0, 1, \pi\}$  ،  $D_f = \{-\pi, 0, \pi\}$  (۱)

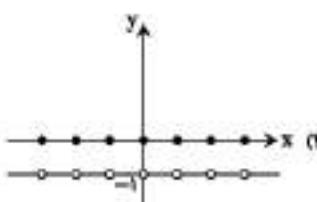
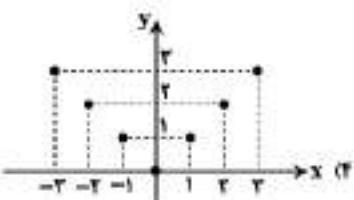
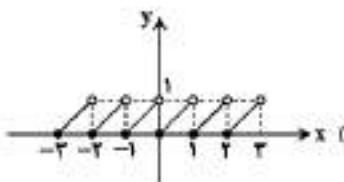
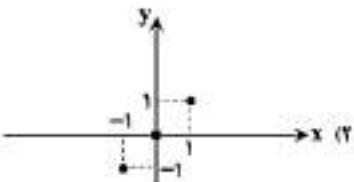
$R_f = \{0, -\pi, \pi\}$  ،  $D_f = \{-1, -\pi, 1, \pi\}$  (۱)

$R_f = \{-1, -\pi, \pi\}$  ،  $D_f = \{-1, 0, 1, \pi\}$  (۱)

تست ۹: در کدام یک از توابع زیر، دامنه برابر  $[1, 2]$  و برد برابر  $[0, 2]$  است؟

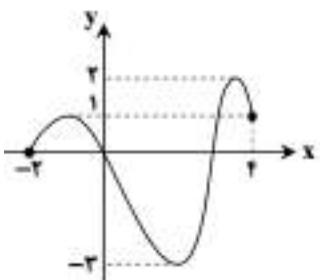


تست ۱۰: در کدام گزینه، نمودار تابعی با دامنهٔ نامتناهی و برد متناهی رسم شده است؟



نمودار  $(x)f$  به شکل مقابل است. اگر دامنهٔ تعریف تابع، مجموعه A و برد تابع، مجموعه B باشد،

A ∩ B شامل چند عدد صحیح است؟



۰ (۰)

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)



تست ۱۱: اگر دامنهٔ تابع  $f(x) = 2x + 7$  باشد، برد آن کدام است؟

[۷, ۹] (۴)

[۹, ۱۱] (۳)

[۷, ۱۱] (۲)

[۰, ۶] (۱)



**نکته:** اگر  $y = f(x)$  یک تابع باشد، منظور از  $f(a)$ ، عبارتی است که از قرار دادن مقدار  $a$  به جای متغیر  $x$  در تابع به دست می‌آید.

$$\text{EX)} \quad f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 1} \Rightarrow f(\cdot) = \frac{3(\cdot)^2 + 1}{(\cdot) - 1} = -1, \quad f(a+1) = \frac{3(a+1)^2 + 1}{(a+1) - 1}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

**مثال ۳:** اگر  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$ ,  $g(x) = 3x^2 - 1$  مطلوب است:

$$f(\cdot) = , f(-1) =$$

$$g(-2) = , g(\sqrt{2}) =$$

$$f(x-1) = , g(a^2) =$$



نکته: دو تابع  $f$  و  $g$  مساویند هرگاه: (الف)  $D_f = D_g$

مثال: آیا توابع  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = \frac{x}{x}$  مساویاند؟

.  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$  خیر زیرا:

مثال: آیا توابع  $f(x) = \frac{2x+4}{2}$ ,  $g(x) = x+2$  مساویاند؟

$$D_f = \mathbb{R} = D_g , f(x) = \frac{2x+4}{2} = \frac{2(x+2)}{2} = x+2 = g(x) \text{ بد. زیرا:}$$

**مثال ۴:** کدام دسته از توابع زیر مساویند؟

$$1 - \begin{cases} f(x) = 2x - 1 \\ g(x) = \frac{4x - 2}{2} \end{cases}, 2 - \begin{cases} f(x) = x + 1 \\ g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \end{cases}$$

$$3 - \begin{cases} f(x) = \sin x \\ g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} \end{cases}, 4 - \begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x+1} \\ g(x) = \sqrt{x(x+1)} \end{cases}$$

تست ۱۳۴- دو تابع  $g(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$  و  $f(x) = \begin{cases} 1 & x > a \\ b & x < c \end{cases}$  برابرند. مقدار  $a+b+c$  کدام است؟

-۱ (۴)

۳ (۳)

-۳ (۲)

۱ (۱)



تست ۱۴: در کدام گزینه، تابع  $f$  و  $g$  برابرند؟

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x} \\ g(x) = \frac{x+1}{x} \end{cases} \quad (\text{۱})$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^r(x-1)} \\ g(x) = |x| \sqrt{x-1} \end{cases} \quad (\text{۲})$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \end{cases} \quad (\text{۳})$$

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = \frac{x^r - x}{x-1} \end{cases} \quad (\text{۴})$$



در کدام گزینه دو تابع  $f$  و  $g$  با هم مساوی‌اند؟

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, g(x) = \frac{x+1}{x^r - 1} \quad (\text{۱})$$

$$f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^r \quad (\text{۲})$$

$$f(x) = \frac{r|x|}{x}, g(x) = \frac{rx}{|x|} \quad (\text{۳})$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}, g(x) = \sqrt{x} \quad (\text{۴})$$

تست ۱۵: کدام دو تابع داده شده مساوی‌اند؟

$$g(x) = \frac{|x+1|}{x}, f(x) = \frac{x+1}{|x|} \quad (\text{۱})$$

$$g(x) = x|x+1|, f(x) = x(x+1) \quad (\text{۲})$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^r}}{|x|}, f(x) = 1 \quad (\text{۳})$$

$$g(x) = \frac{x^r - 1}{|x| + 1}, f(x) = |x| - 1 \quad (\text{۴})$$

تست ۱۶: اگر دو تابع  $f$  مساوی باشند، مقدار  $k$  کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{qx^r - 1}{rx + 1}, & x \neq -\frac{1}{r} \\ k + x, & x = -\frac{1}{r} \end{cases}$$



$$-\frac{r}{r} \quad (\text{۱})$$

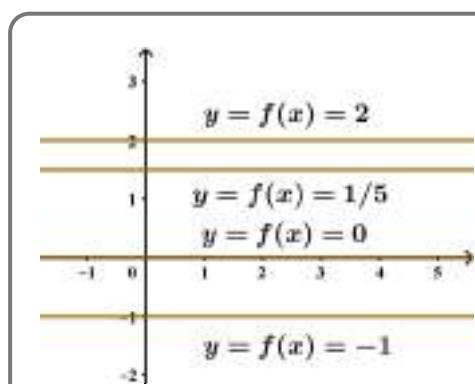
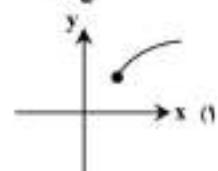
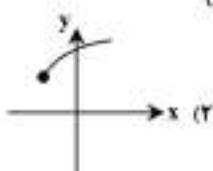
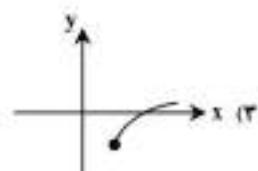
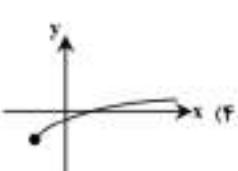
$$-\frac{a}{r} \quad (\text{۲})$$

$$-\frac{r}{q} \quad (\text{۳})$$

$$-1 \quad (\text{۴})$$



تست ۱۷: اگر دو تابع  $y = \sqrt{x+a} - a$  با هم مساوی باشند، نمودار تابع با ضابطه  $g(x) = ax + 1$ ،  $f(x) = \begin{cases} \frac{rx^r - 1}{rx + 1} & x \neq -\frac{1}{r} \\ a & x = -\frac{1}{r} \end{cases}$  کدام است؟



انواع توابع:



$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = a$$

۱) تابع ثابت: ضابطه تابع ثابت به صورت

که در آن  $a \in \mathbb{R}$ . نمودار این تابع به صورت خط افقی است.

در حالت کلی داریم:  $D_f = \mathbb{R}, R_f = \{a\}$

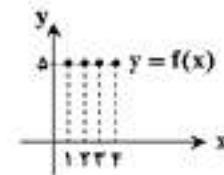
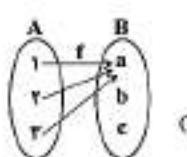
دانلود از سایت ریاضی سرا

((س) سه جمله برای دستیابی به هوففیت: ۱) بیشتر از دیگران بدان، ۲) بیشتر از دیگران کار کن، ۳) کمتر از دیگران توقع داشته باش.

کدام گزینه یک تابع ثابت را مشخص نمی‌کند؟

$$f = \{(v, v), (v, v), (v, v)\}$$

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = v \end{cases}$$



۴) صفر  
۳) -۷  
۲) ۸  
۱) ۶



$$f(x) = \begin{cases} (a-2)x + 3 & x \geq 1 \\ b & x < 1 \end{cases}$$

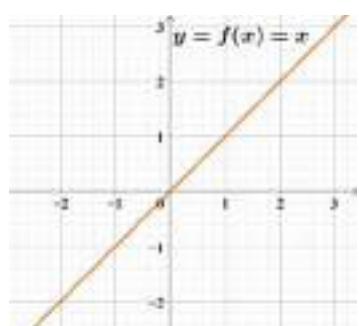
۵) ۴  
۳) ۳  
۲) ۲  
۱) ۱

۱) صفر  
۲) ۶  
۳) ۳  
۴) ۹



۱) صفر  
۲) ۶  
۳) ۳  
۴) ۹

۱) صفر  
۲) ۶  
۳) ۳  
۴) ۹



۱) تابع همانی: ضابطهٔ توابع همانی به صورت  $f(x) = x$  است.



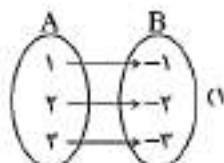
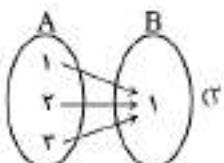
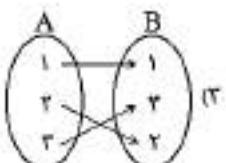
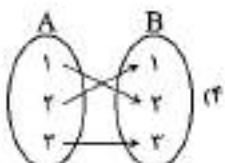
۲) نمودار این تابع نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات

۳) را تشکیل می‌دهد. در حالت کلی داریم:  $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$ .

دانلود از سایت ریاضی سرا

((اهم رضا)) : هر کس به خدا خوشگهان باشد، خداوند مطابق گهان او، با وی رفتار هیکند. ( ))

**تست ۲۵:** کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر، یک تابع همانی را معرفی می‌کند؟



-۵ (۴)

۵ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

**تست ۲۶:** اگر تابع  $f = \{(2, x+y), (x+4, y), 2x+y\}$  کدام است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



**تست ۲۷:** اگر  $f = \{(2, 3a+5), (a+b, 2b)\}$  تابعی همانی باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟

$\{-1, 0, 1\}$  (۴)  
{1} (۳)  
 $\mathbb{N}$  (۲)  
 $\mathbb{R}$  (۱)



**تست ۲۸:** تابع  $f$  تابعی ثابت و همانی است. دامنه این تابع کدام می‌تواند باشد؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

-۱ (۱)



**تست ۲۹:** زوج مرتب  $(1-n^2+n-1, n^2+n-1)$  روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار دارد. مجموع مقادیر ممکن  $n$  کدام است؟

**شایعه:** اگر  $x = f(x)$  تابعی همانی و  $y = g(x)$  تابعی ثابت باشد و:

الف) اگر  $g(xy) = g(x)g(y)$ ، مقدار  $c$  را بیابید.

ب) اگر  $f(x^2) = f(x) + f(5)$ ، مقدار  $x$  را بیابید.

(()) موقوفیت به سراغ کسانی هی آید که آن قدر در تلاشند که وقت نهی کنند دنبال آن بروند. ))

**ست ۳۰:** اگر  $f$  تابع ثابت و  $g$  تابع همانی باشد؛ به طوری که  $f(2) = g(2)$ ، مقدار  $(f(-1) + g(5))$  کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۲ (۳)

۵ (۲)

۳۶ (۱)



**ست ۳۱:** اگر  $f = \{(a+b, 3), (5, 3a-b)\}$  یک تابع همانی و  $g(x) = (x+1)^2 - cx^2 + dx + a$  یک تابع ثابت باشد، حاصل  $ad + bc$  کدام است؟

-۵ (۴)

۳ (۳)

-۳ (۲)

۵ (۱)



**(۳) تابع چندجمله‌ای:** توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

$$f(x) = 2x^2 + 5, \quad g(x) = x^2 - 3x^2 + 4x$$

نکته: دامنه توابع چندجمله‌ای، هموی اعداد حقیقی است.

**الف) توابع درجه اول(خطی):** توابع چندجمله‌ای هستند که توان متغیر آنها حداقل یک باشد. نمودار این توابع به صورت یک خط راست است. این توابع به صورت کلی  $f(x) = ax + b$  هستند.

**ب) توابع درجه دوم(سهمی):** توابع چندجمله‌ای هستند که توان متغیر آنها دو باشد. این توابع معمولاً به صورت گسترده  $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$  یا استاندارد  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) به کار می‌روند.

نکته: راس سهمی‌هایی که به شکل گسترده یعنی  $y = ax^2 + bx + c$  باشند، به صورت زیر است:

$$S = \left( -\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right) = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

نکته: خط  $x = -\frac{b}{2a}$  محور تقارن و  $y = -\frac{\Delta}{4a}$  مقدار ماکزیمم و یا مینیمم سهمی است.

نکته: اگر  $a > 0$  دهانه سهمی به سمت بالا و اگر  $a < 0$  به سمت پایین باز می‌شود.

نکته: محل تقاطع سهمی با محور  $y$  ها نقطه  $(0, c)$  است.

نکته: اگر  $x = \frac{b+a}{2}$  دو نقطه از تابع باشند،  $B = (b, c)$ ,  $A = (a, c)$  خط تقارن سهمی خواهد بود.

مثال: برای سهمی  $f(x) = x^2 + 4x - 1$  داریم:

$$S = \left( \frac{-4}{2} = -2, -2 - 1 - 1 \right) = (-2, -5), \quad \min(f) = -5$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

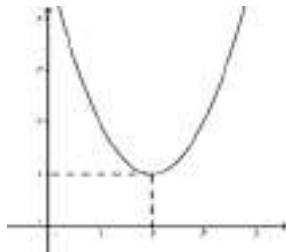


نکته: راس سهمی‌هایی که به شکل استاندارد یعنی  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  باشند، نقطه  $S = (\alpha, \beta)$  است.

مثال: نمودار تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  را رسم کنید.

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow S = \left( -\frac{b}{2a} = 2, -\frac{\Delta}{4a} = 1 \right) \\ f(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(x) = (x - 2)^2 + 1 \Rightarrow S = (2, 1) \end{cases}$$

x	1	2	3
$f(x) = x^2 - 4x + 5$	2	1	2



نکته: برای رسم سهمی  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  کافی است ابتدا سهمی  $y = x^2$  را رسم کنیم و سپس آنرا به اندازه  $\alpha$  واحد به چپ یا راست و به اندازه  $\beta$  واحد به چپ یا راست منتقل کنیم.

مثال: برای رسم سهمی، سهمی  $y = x^2$  را به نقطه  $(2, 1)$  منتقل کنیم. (نمودار بالا)

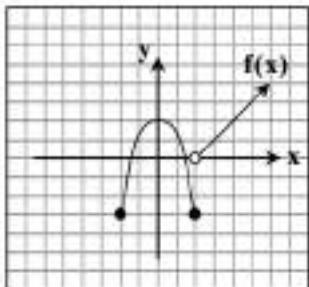
$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow R_f = [\beta, +\infty) , \min(f) = \beta \\ a < 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, \beta] , \max(f) = \beta \end{cases}$$

نکته: داریم:

مثال: برای سهمی  $f(x) = -2(x - 2)^2 + 4$  داریم:

$$f(x) = -2(x - 2)^2 + 4 \Rightarrow S = (-(-2), 4) = (2, 4)$$

$$\xrightarrow{a < 0} \max(f) = 4 , R_f = (-\infty, 4]$$



تست ۳۲: شکل مقابل مربوط به کدام تابع قطعه‌ای است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & -2 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & x > 2 \end{cases} \quad (۳) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & -2 < x \leq 2 \\ x + 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad (۱)$$



$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2 & -2 < x \leq 2 \\ x - 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad (۴) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2 & -2 < x \leq 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases} \quad (۲)$$



تست ۳۳: اگر  $(-2, 5)$  و  $(5, 0)$  دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی کدام است؟

$$x = +\infty \quad (۱)$$

$$x = -1 \quad (۳)$$

$$x = 2 \quad (۲)$$

$$x = 1 \quad (۱)$$



**مثال ۶:** نمودار توابع  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ ,  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $f(x) = -2(x-2)^2$  را رسم کنید.



**مثال ۷:** توابع  $y = x^2 - 4x + 1$  و  $y = -x^2 - x + 2$  را در نظر بگیرید. کمترین یا بیشترین مقدار هر کدام را نیز بیابید.



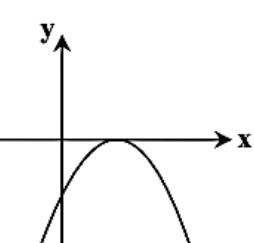
**مسئلہ ۳۴:** رأس سهمی  $y = -7x^2 + 3x - 1$  در کدام ناحیه مختصات قرار دارد؟

۴) چهارم

۳) سوم

۲) دوم

۱) اول



**مسئلہ ۳۵:** بازای کدام مقدار  $a$ ، شکل مقابل نمودار تابع  $y = -x^2 + 4x + a$  است؟

-۱) ۱

-۲) ۲

-۳) ۳

-۴) ۴



**مسئلہ ۳۶:** اگر خط  $x = 2$  خط تقارن سهمی  $y = (m-1)x^2 + x + 3$  باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

$\frac{5}{4}$  (۴)

$\frac{4}{5}$  (۳)

$\frac{3}{4}$  (۲)

$\frac{4}{3}$  (۱)



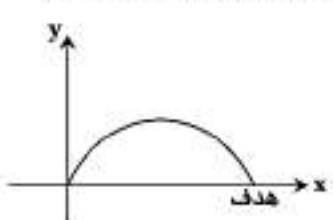
**مسئلہ ۳۷:** تویی را همانند شکل، پرسخت هدفی پرتاب می کنیم. معادله حرکت تویی به شکل یک تابع درجه دو با ضایعه  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$  است که ۲ مسافت افقی طی شده (برحسب متر) و لازمباشد تویی از سطح زمین (برحسب متر) می باشد. بیشترین ارتفاعی که تویی از سطح زمین دارد، چند متر است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴



دانلود از سایت ریاضی سرا

تست ۳۸: - اگر  $y + 3x = 12$ ، بیشترین مقدار  $xy$  کدام است؟

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۲ (۲)

۱۲ (۱)



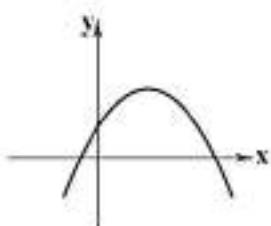
تست ۳۹: در یک سهمی به معادله  $b^T < fac$  است. اگر  $a+b+c < 0$ ،  $f(x) = ax^T + bx + c$  چگونه است؟

$a < 0, c > 0$  (۴)

$a > 0, c < 0$  (۳)

$c < 0, a < 0$  (۲)

$a > 0, c > 0$  (۱)



اگر سهمی به صورت زیر باشد، علامت‌های  $b, a$  و  $c$  کدام است؟

$c < 0, b > 0, a < 0$  (۴)

$c > 0, b > 0, a < 0$  (۳)

$c > 0, b < 0, a < 0$  (۲)

$c > 0, b > 0, a > 0$  (۱)

تست ۴۰: خط تقارن سهمی  $c - a$  می‌گذرد. مقدار  $c - a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



تست ۴۱: - اگر نقطه  $S(n-1, 8)$  رأس سهمی  $y = 2x^T - 12x + m - 1$  باشد، حاصل  $m - n$  کدام است؟

-۲۷ (۴)

۲۷ (۳)

-۲۳ (۲)

۲۳ (۱)



تست ۴۲: - یک سهمی از نقاط  $(1, -2)$  و  $(2, -2)$  می‌گذرد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض  $-4$ - قطع می‌کند. برد این تابع کدام است؟

$(-\infty, -\frac{4}{2})$  (۴)

$(-\infty, -2]$  (۳)

$(-\infty, -2]$  (۲)

$[-4, +\infty)$  (۱)



تست ۴۴: - یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه  $t$  ام از رابطه

$h = -5t^2 + 18t + 13$  محاسبه می‌شود. تا چند ثانیه پس از آغاز حرکت، ارتفاع توب از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

۲/۶ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

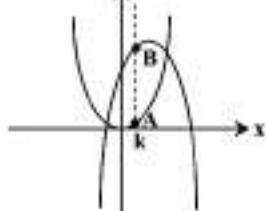
۲/۲ (۱)



- تست ۴۲: - در سه‌می  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، کدام گزینه در مورد معادله  $x^2 - 2x - 1 = 0$  درست است؟
- ممکن است ریشه مضاعف داشته باشد.
  - قطعان ریشه ندارد.

- قطعان دو ریشه متمایز دارد.
- می‌تواند ریشه نداشته باشد.

- تست ۴۰: - مطابق شکل رویه‌رو، خط عمودی و دلخواه  $y = k$  را در نقطه A و سه‌می  $x = k$  را در نقطه B قطع می‌کند. به ازای مقادیر مختلف k، حداقل مقدار  $y_A - y_B$  کدام است؟



- ۵/۵
- ۳/۵
- ۱/۵
- ۰/۵



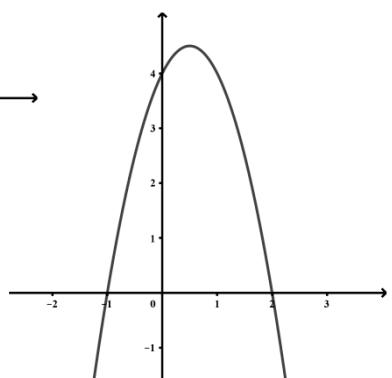
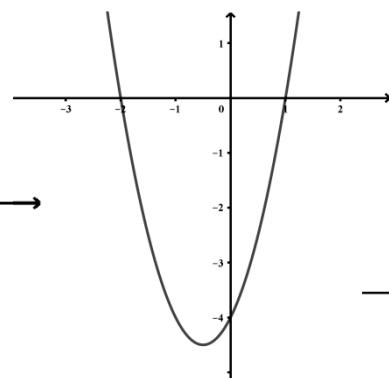
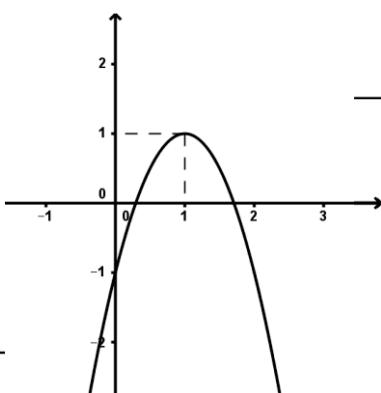
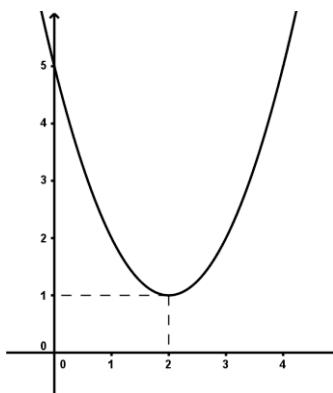
**نکته:** نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند  $f$  با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم. پس صفرهای تابع ریشه‌های معادله  $* = f(x) = 0$  هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار مقدار تابع برابر صفر است.

**مثال:** تابع  $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$  محور طول‌ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 7 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \rightarrow x = 1, x = -\frac{7}{2}$$

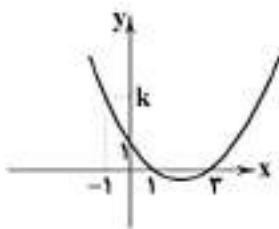
**نکته:** اگر صفرهای سه‌می  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشند، معادله آن را می‌توانیم به صورت  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  بنویسیم.

محل ۸: معادله توابع زیر را بیابید.

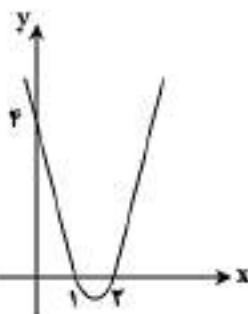


((اهم رضا(ع)): هر که کاری را از راه درست دنبال کند نخواهد لغزید، و اگر هم بلغزد راه چاره بر او بسته نهی شود.))

تست ۳۹: اگر نمودار زیر یک سهمی باشد، مقدار  $k$  چقدر است؟



- ۱)  $\frac{1}{2}$   
 ۲)  $\frac{1}{3}$   
 ۳)  $\frac{1}{5}$   
 ۴)  $\frac{1}{4}$



تست ۴۰:

- شکل مقابل، نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است. مقدار  $f(-4)$  کدام است؟

- ۱) ۶  
 ۲) ۸  
 ۳) ۱۰  
 ۴) ۱۲

نمودار تابع با ضابطه  $10 - 3x - x^2 = y$  را، حداقل چند واحد به طرف  $x$ های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل

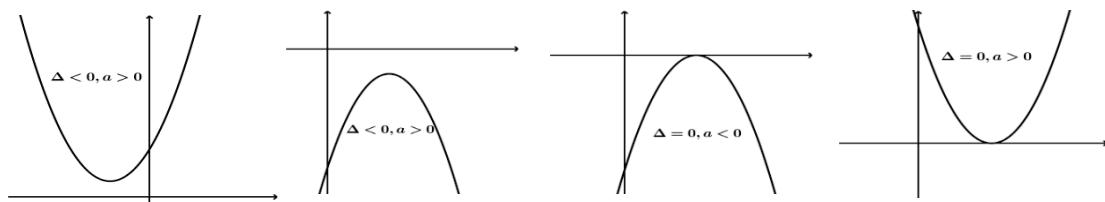
با محور  $x$ ها غیرمنفی باشد؟

- ۱) ۱  
 ۲) ۲  
 ۳) ۳  
 ۴) ۴

تست ۴۱:

(تجربی خارج ۹۳)

نکته: اگر در توابع درجه دوم  $a > 0, \Delta < 0$ ، تابع همواره بالای محور  $x$ ها(مثبت) است، و اگر  $a < 0, \Delta < 0$  تابع همواره پایین محور  $x$ ها(منفی) است. همچنین اگر  $\Delta = 0$ ، تابع بر محور  $x$ ها مماس است.



تست ۴۲:

محدوده  $a$  کدام باشد تا نمودار تابع  $y = x^2 + 2ax + 1$  بالای محور  $x$ ها قرار گیرد؟

- ۱)  $a > -1$   
 ۲)  $a < 1$   
 ۳)  $a < -1$   
 ۴)  $-1 < a < 1$

تست ۴۳:

**تست ۴۴:** به ازای کدام مقادیر  $m$  نمودار تابع  $y = (m - 1)x^2 + \sqrt{3}x + m$  همواره در زیر محور  $x$  ها است؟

$m > \frac{3}{4}$  (۱)

$1 < m < \frac{3}{4}$  (۲)

$-\frac{1}{2} < m < 1$  (۳)

$m < -\frac{1}{2}$  (۴)

(ریاضی ۸۵)



به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع  $y = (m + 2)x^2 - 2mx + 1$  همواره در بالای محور  $x$  ها است؟

$-1 < m < 2$  (۱)

$-2 < m < 2$  (۲)

$-2 < m < -1$  (۳)

$m > -2$  (۴)

(خارج ریاضی ۸۵)



به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، هر نقطه از نمودار تابع  $f(x) = (a - 1)x^2 + 2\sqrt{2x} + a$  در بالای محور  $x$  ها است؟

$1 < a < 2$  (۱)

$a > 2$  (۲)

$a > 1$  (۳)

$a < -1$  (۴)

(خارج ریاضی ۸۹)



**تست ۴۹:** اگر سهیمی  $y = -x^2 + x - m$  همواره زیر خط  $y = 2$  واقع شود، حدود  $m$  کدام است؟

$m > -\frac{7}{4}$  (۱)

$m > -\frac{9}{4}$  (۲)

$m > -1$  (۳)

$m > -2$  (۴)



**تست ۵۰:** - حاصل جمع مقادیر صحیح  $m$  که به ازای آنها نامعادله  $\frac{(m - 2)x^2 - 2(m - 2)x + 2}{-x^2 + 2x - 2} \leq 0$  همواره برقرار باشد، کدام است؟

۱۳ (۱)

۱۵ (۲)

۱۷ (۳)

۱۲ (۴)



**تست ۱۵:** اگر عبارت  $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$  به ازای هر مقدار  $x$  منفی باشد،  $a$  به کدام مجموعه تعلق دارد؟

R (۴)       $\phi$  (۳)       $\{a : a < 1\}$  (۲)       $\{a : 1 < a < 5\}$  (۱)

(ریاضی ۹۱)

**تست ۱۶:** ۱- به ازای کدام مقادیر  $m$ ، عبارت  $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$  برای هر مقدار  $x$  مثبت است؟

$1 < m < 2/5$  (۴)       $1 < m < 2$  (۳)       $m > 2/5$  (۲)       $m < -2$  (۱)

(خارج ریاضی ۹۰)

**نکته:** اگر در تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$ ، معادله دو ریشه غیر هم‌عملامت خواهد داشت و در نتیجه تابع از چهار ناحیه می‌گذرد.

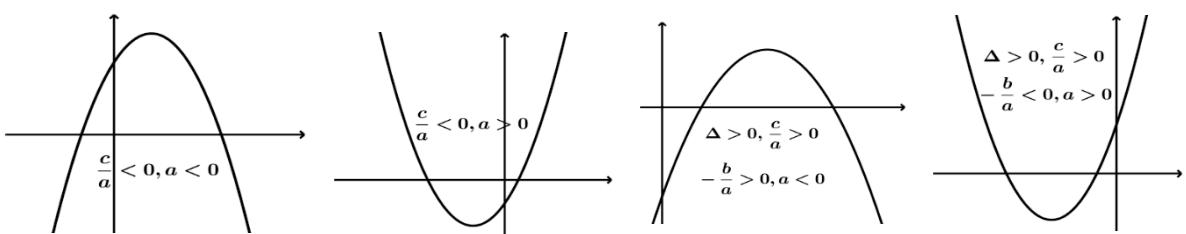


**نکته:** اگر  $\Delta > 0$  و  $a > 0$  (معادله دو ریشه هم‌عملامت داشته باشد)، بسته به علامت  $\frac{c}{a}$  و علامت مجموع ریشه‌ها یعنی  $-\frac{b}{a}$ ، تابع فقط از یکی از ناحیه‌ها نمی‌گذرد.

**نکته:** به طور مثال اگر قرار باشد تابع فقط از ناحیه سوم نگذرد باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\Delta > 0, a < 0, \frac{c}{a} > 0, -\frac{b}{a} > 0.$$

**نکته:** در هر مورد که صورت سوال با ریشه صفر مشکل نداشته باشد، جای  $x = 0$  از  $\frac{c}{a}$  استفاده می‌شود.



**تست ۱۷:** به ازای کدام مقدار  $m$  نمودار تابع  $y = (1-m)x^2 + x + m - 2$  از چهار ناحیه محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

$-1 < m < 2$  (۴)

$1 < m < 2$  (۳)

$m > 2$  (۲)

$m < 1$  (۱)

(( امام رضا(ع): آن کسی که نفسش را محاسبه کند، سود برده است و آن کسی که از محاسبه نفس غافل بگاند، زیان دیده است. ))

**تست ۴:** اگر نمودار تابع  $y = x^2 + bx + c$  فقط از ناحیه چهارم نگذرد، آن‌گاه:

$$c \leq 0, b < 0 \quad (۱)$$

$$c \geq 0, b < 0 \quad (۲)$$

$$c \leq 0, b > 0 \quad (۳)$$

$$c \geq 0, b > 0 \quad (۴)$$



به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع  $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$  همواره در بالای محور  $x$  ها است؟

$$-1 < m < 2 \quad (۱)$$

$$-2 < m < 2 \quad (۲)$$

$$-2 < m < -1 \quad (۳)$$

$$m > -2 \quad (۴)$$

(ریاضی خارج ۸۵)



به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$  محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های مثبتی قطع می‌کند؟

$$m \text{ هر مقدار} \quad (۱)$$

$$-1 < m < 2 \quad (۲)$$

$$m > 2 \quad (۳)$$

$$4) \text{ هیچ مقدار}$$

(ریاضی ۹۵)



به ازای کدام مقادیر  $a$  منحنی به معادله  $y = ax^2 - (a+2)x - (a+2)$  از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

$$-2 < a < 0 \quad (۱)$$

$$a > 0 \quad (۲)$$

$$a > -2 \quad (۳)$$

$$a < -2 \quad (۴)$$

(ریاضی ۸۹)



به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، نمودار تابع  $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$  از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

$$0 < a < 3 \quad (۱)$$

$$2 < a < 3 \quad (۲)$$

$$0 < a \leq 2 \quad (۳)$$

$$a \leq 2 \quad (۴)$$

(ریاضی ۹۲)



۱- با کدام مقادیر  $m$  منحنی به معادله  $y = (m+2)x^2 - 2x + 1$  از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

$$-4 < m < -2 \quad (4)$$

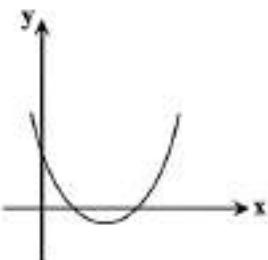
$$-2 < m < -1 \quad (3)$$

$$m < -1 \quad (2)$$

$$m < -2 \quad (1)$$

تست ۵۹

(ریاضی خارج ۸۷)



تست ۶۰: - اگر شکل مقابل، نمودار تابع  $f(x) = x^2 - mx + m + \frac{5}{4}$  باشد، دقیق‌ترین محدوده کدام است؟

$$m > + \quad (1)$$

$$-1 < m < + \quad (2)$$

$$m > 5 \quad (3)$$

$$m > -\frac{5}{4} \quad (4)$$

تست ۶۱:

(خارج ریاضی ۹۲)

- به ازای کدام مقادیر مجموعهٔ مقادیر  $a$  نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$  محور  $x$  را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

$$-3 < a < + \quad (4)$$

$$a > -1 \quad (3)$$

$$a < -3 \quad (2)$$

$$a < -9 \quad (1)$$

تست ۶۲:

(ریاضی ۸۷)

اگر منحنی به معادله  $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور  $x$  را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

$$4 < m < 5 \quad (4)$$

$$3 < m < 5 \quad (3)$$

$$3 < m < 4 \quad (2)$$

$$m > 3 \quad (1)$$

تست ۶۳:

(خارج ۹۵)

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور  $x$  را در هر دو طرف مبدأً مختصات، قطع می‌کند؟

$$m > 1 \quad (4)$$

$$m < -2 \quad (3)$$

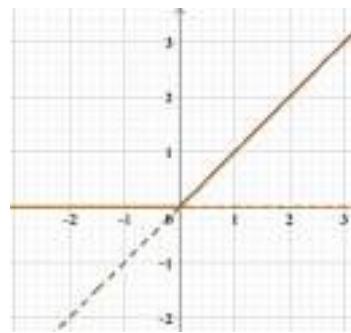
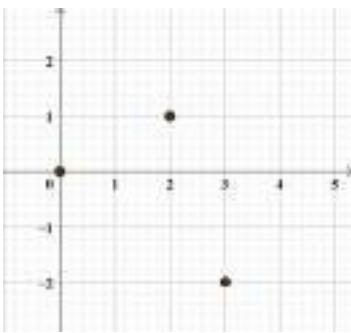
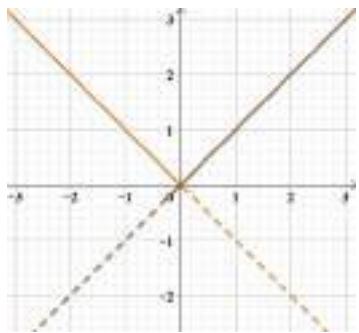
$$-2 < m < 1 \quad (2)$$

$$m > 1 \text{ یا } m < -2 \quad (1)$$



**۴) تابع چندضابطه‌ای:** توابعی هستند که برای قسمت‌های مختلف دامنه‌شان، ضوابط مختلفی دارند. به طور مثال همه توابع زیر چند ضابطه‌ای هستند:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & , x = 2 \\ -1 & , x = 3 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}, h(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



**نکته:** دامنه این توابع با توجه به محدوده‌ی تعیین شده برای متغیر مستقل ( $x$ ) و نمودار قابل تشخیص است.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \{0, 2, 3\}, D_h = \mathbb{R}$$

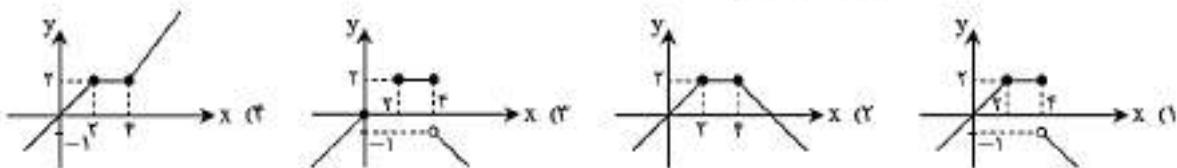
**نکته:** برد این توابع با توجه به ضابطه‌ی تعیین شده برای متغیر وابسته ( $y$ ) و نمودار قابل تشخیص است.

$$R_f = \mathbb{R}, R_g = \{-1, 0, 1\}, R_h = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$$

تست ۶۴



$$f(x) = \begin{cases} x & , x < 2 \\ 2 & , 2 \leq x \leq 4 \\ 2-x & , x > 4 \end{cases} \text{ کدام است؟}$$



تست ۶۵



$$f(\sqrt{2}-1) + f(\sqrt{2}+1), \text{ مقدار } f(x) \text{ کدام است؟}$$

$\sqrt{2}-2$  (۴)

۰ صفر

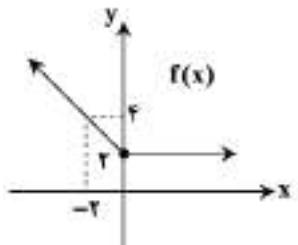
-۱ (۲)

۱ (۱)

تست ۶۶



ضابطه تابع ( $f(x)$ ) که نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد، کدام است؟



$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & , x \leq 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} -x + 2 & , x \leq 0 \\ 2 & , x > 0 \end{cases} \quad (۳)$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x & , x \leq 0 \\ 2 & , x > 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} -2x & , x \leq 0 \\ x + 2 & , x > 0 \end{cases} \quad (۴)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

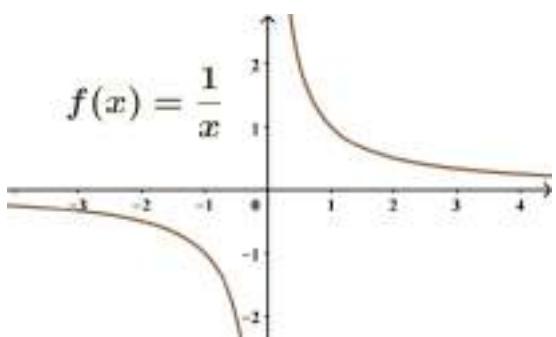
$$f(x) = \begin{cases} -x - 4 & ; \quad x < -4 \\ \frac{1}{x^2} & ; \quad -4 < x < 4 \\ 4 & ; \quad x \geq 4 \end{cases}$$

 $(-4, +\infty) \setminus \{4\}$  $(-\infty, 4) \cup \{4\}$ 

تست ۲۷: برد تابع چندضابطه‌ای زیر کدام است؟

 $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$  $(-\infty, 4]$ 

**۰) تابع گویا:** هر تابع به صورت  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $Q(x) \neq 0$  را که در آن صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند را، یک تابع گویا مینامیم. دامنه این توابع شامل همه اعداد حقیقی بجز ریشه‌های مخرج است.

مثال: دامنه و برد تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را بیابید.

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

تست ۲۸: دامنه تابع زیر را بیابید.

a)  $y = \frac{x}{x - \sqrt{3}}$

, b)  $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2 - 4x}$

c)  $y = \frac{1-x}{x^2 - 9/16}$

, d)  $y = \frac{3}{x^2 - 7x + 6}$

تست ۲۹: - دامنه تابع  $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 6x + a}$  برابر  $\mathbb{R} - \{b\}$  است. مقدار  $a+b$  کدام است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)



-۴ (۴)

۴ (۳)

-۱۲ (۲)

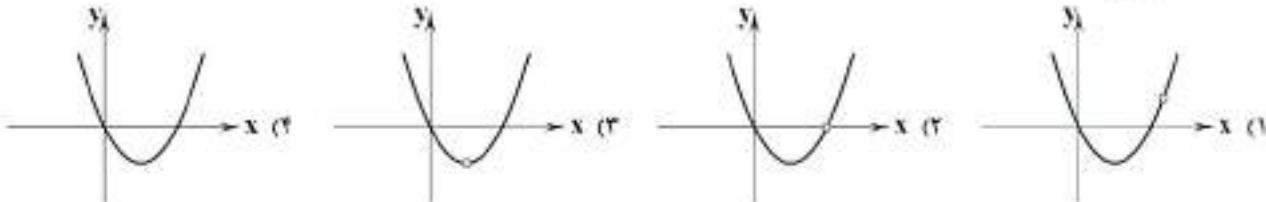
۱۲ (۱)

تست ۳۰: اگر دامنه تابع  $y = \frac{1}{x^2 - ax + 2 + b}$  کدام است؟

- تست ۷۰:** اگر دامنهٔ تابع گویای  $f(x) = \frac{1}{x^2 - mx - n}$  برابر  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$  باشد، مقدار  $n$  کدام است؟
- ۱۸ (۲) ۱۲ (۱)
- ۱۲ (۴) -۱۸ (۳)



- تست ۷۱:** نمودار  $y = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x-1}$  شبیه کدام است؟



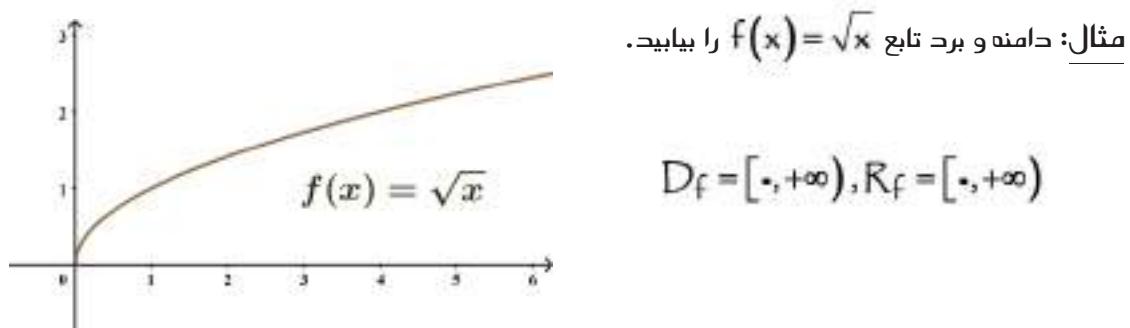
- تست ۷۲:** نمودار زیر مربوط به کدام تابع زیر است؟



۶) **تابع رادیکالی:** توابع رادیکالی به صورت  $f(x) = \sqrt{P(x)}$  هستند، که در آن عبارت زیر رادیکال یک عبارت گویا است. واضح است که برای محاسبه دامنه این تابع کافی است شرط  $P(x) \geq 0$  را بررسی کنیم.



مثال: دامنه و برد تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را بیابید.



(( هیچ موفقیت حقیقی به دست نهی آید، مگر اینکه با ارزش‌های اساسی ها مطابقت داشته باشد. ))

دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

**شماره ۱۰:**

a)  $y = \sqrt{x+6}$

, b)  $y = \sqrt{x^2 + 5x}$



c)  $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

, d)  $y = \sqrt[3]{x-2}$

دامنهٔ تابع  $f(x) = x + \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$  بازه  $[a, b]$  می‌باشد.  $b - a$  کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)



**شماره ۷۳:**

اگر معادله  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2 + mx} + \sqrt{x^2 - nx} = 0$  فقط یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد، مقدار  $m+n$  چقدر است؟

-۹ (۴)

۱ (۲)

۲ (۲)

۱۲ (۱)



**شماره ۷۴:**

دامنهٔ تابع  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  با دامنهٔ کدام تابع زیر برابر است؟

$h(x) = \sqrt{4-x} + \frac{1}{\sqrt{4+x}}$  (۱)

$g(x) = \sqrt{4-x} \times \sqrt{4+x}$  (۱)

$k(x) = \sqrt{4+x} - \frac{1}{\sqrt{4-x}}$  (۱)

$m(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}}$  (۱)

**شماره ۷۵:**



اگر دامنهٔ تابع  $g(x) = b - \sqrt{x+c}$  بصورت  $D_g = \mathbb{R} - \{d\}$  باشد، اشتراک دامنه و برد تابع  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + bx + c}$  کدام است؟

$(-\infty, -1)$  (۴)

$[-4, -1]$  (۳)

$[-4, 1]$  (۲)

$[-4, +\infty)$  (۱)



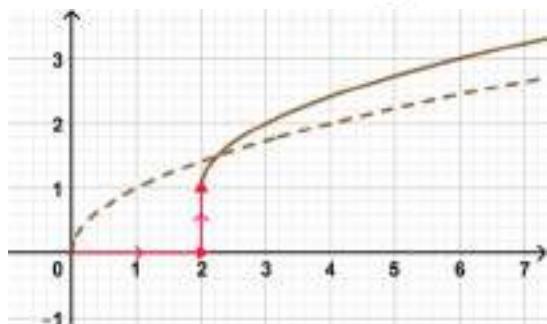
**شماره ۷۶:**



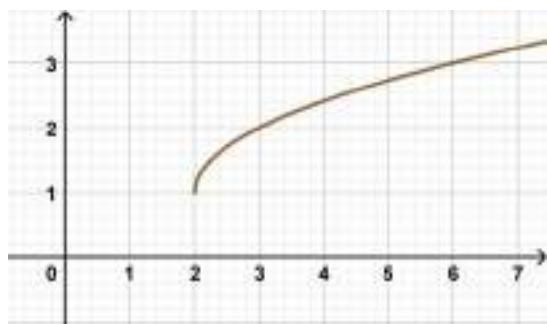
نکته: برای رسم توابع رادیکالی  $y = \sqrt{x - \alpha} + \beta$  ابتدا نقطه کافی است از نقطه  $(\alpha, \beta)$  و یک نقطه کمکی استفاده کنیم. و یا تابع  $y = \sqrt{x}$  را به اندازه  $\alpha$  واحد به چپ یا راست و به اندازه  $\beta$  واحد به بالا یا پایین منتقال دهیم.

مثال: تابع  $y = \sqrt{x - 2} + 1$  را رسم کنید.

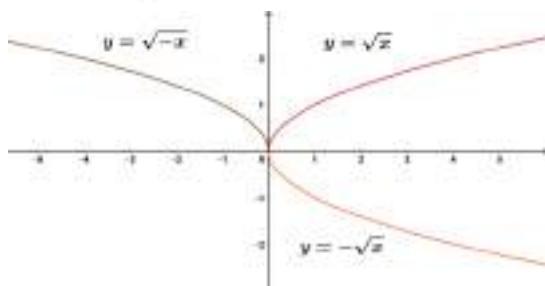
$$y = \sqrt{x - 2} + 1 \Rightarrow S = (2, 1)$$



x	y	$\gamma$
$y = \sqrt{x - 2} + 1$	1	2



نکته: توابع  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt{-x}$  و  $y = -\sqrt{x}$  نسبت محور عرضها و طولها هستند.



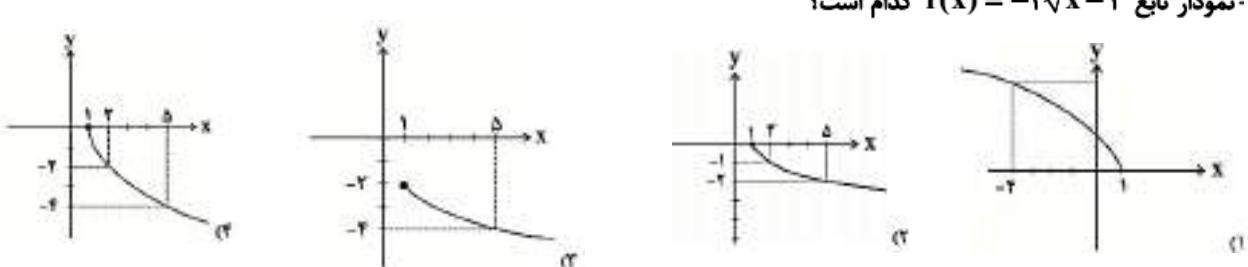
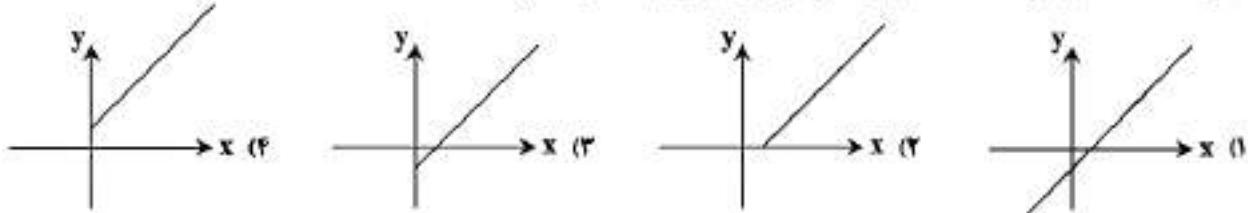
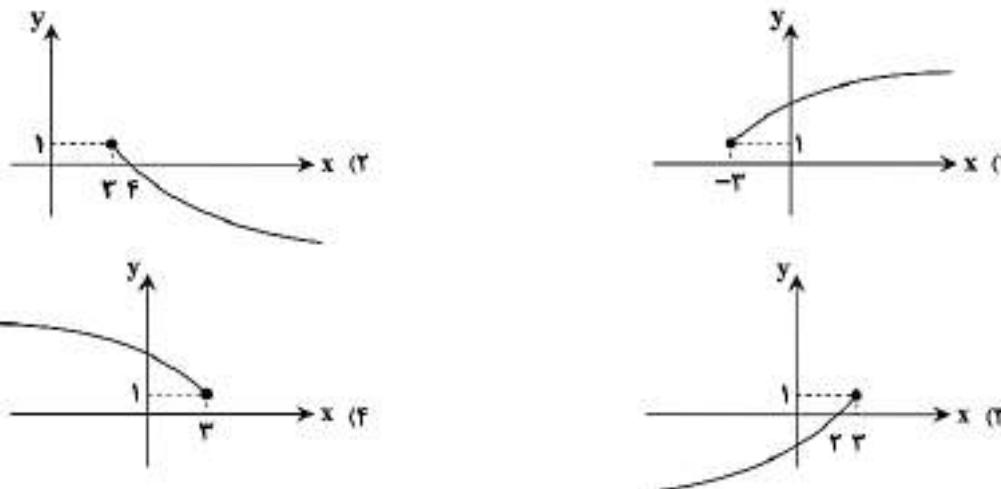
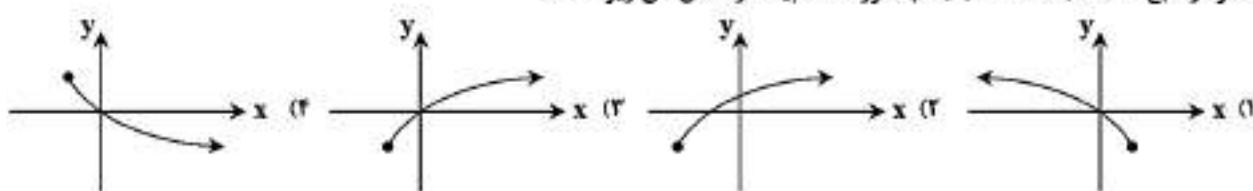
**مثال:** دامنه و برد توابع زیر را بیابید و هر کدام را رسم کنید.

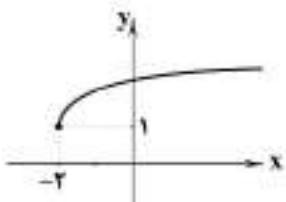
$$y = \sqrt{x + 1} + 1$$

$$, y = \sqrt{x} - 1$$

$$y = -\sqrt{x} + 2$$

$$, y = \sqrt{-x + 2}$$





تمودار زیر، مربوط به کدام تابع می‌تواند باشد؟

ست: ۸۲

$\sqrt{x+2}$  (۱)

$-\sqrt{x+2}$  (۲)

$1-\sqrt{x+2}$  (۳)

$1+\sqrt{x+2}$  (۴)

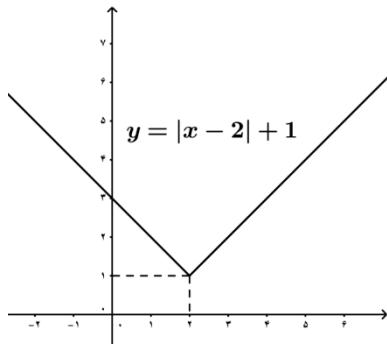
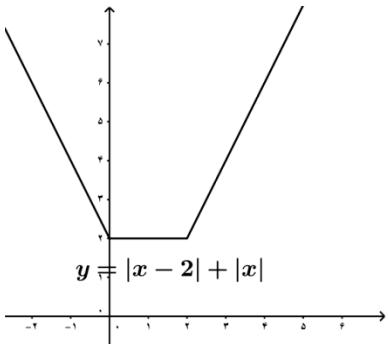
(توابع قدر مطلقی: برای عبارت جبری  $|u|$  تعریف می‌کنیم:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$



رسم توابع قدر مطلق درجه اول: توابع قدر مطلقی در ریشه‌های داخل قدر مطلق شکستگی دارند. پس برای رسم آنها کافی است از این نقاط شکستگی و چند نقطه کمکی استفاده کنیم.

مثال: توابع  $y = |x - 2| + 1$ ,  $y = |x - 2| + |x|$  را رسم کنید.



نکته: برای رسم تابع  $y = |x - \alpha| + \beta$  به روش انتقال، ابتدا تابع  $y = |x|$  را رسم می‌کنیم و سپس تابع را به اندازه  $\alpha$  واحد به سمت چپ یا راست (موافق علامت  $\alpha$ ) و به اندازه  $\beta$  واحد به سمت بالا یا پایین (موافق علامت  $\beta$ )، انتقال می‌دهیم.

ست: ۸۳ توابع  $y = |2x| - |x - 1|$ ,  $y = |x + 1| + |x|$ ,  $y = -|x + 1|$ ,  $y = |x| - 2$ ,  $y = |x + 2| + 1$ ست: ۸۴ اگر دامنه تابع  $f(x) = |x - 2|$  باشد، برد آن کدام است؟

(۱, ۵) (۴)

(۰, ۵) (۳)

(۰, ۵) (۲)

(۳, ۵) (۱)



نمودار تابع  $|x| = f(x)$  را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس نسبت به محور  $x$ ها قرینه کرده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا

تست ۸۴

نمودار تابع  $g$  حاصل شود. حاصل  $(-\sqrt{2} - 1)g$  کدام است؟



$$\sqrt{2} - 2 \quad (2)$$

$$2 - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$1 - \sqrt{2} \quad (4)$$

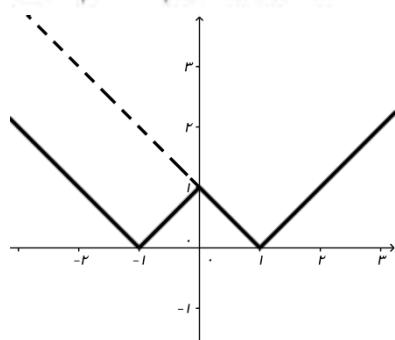
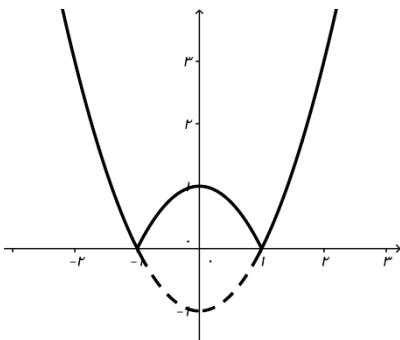
$$\sqrt{2} - 1 \quad (3)$$



نکته: برای رسم تابع قدر مطلقی  $y = |f(x)|$ , ابتدا تابع  $f(x)$  را رسم کرده و سپس قرینه قسمتی از نمودار که در پایین محور طولها است را رسم کرده و در نهایت قسمت پایین محور طولها را حذف می‌کنیم.

نکته: برای رسم تابع قدر مطلقی  $y = f(|x|)$ , ابتدا تابع  $f(x)$  را رسم کرده و سپس قسمت‌هایی از تابع که در سمت چپ محور عرضها قرار گرفته است را حذف می‌کنیم. قسمت سمت راست نمودار اصلی، به همراه قرینه آن، نمودار تابع است.

مثال: نمودار توابع  $y = |x^2 - 1|$ ,  $y = ||x|| - 1$  را رسم کنید.



تست ۸۵: نمودار تابع  $y = |x + 1| - 3$  را حاصل چند واحد به سمت راست منتقل کنیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور طولها غیرمنفی باشد؟

۴/۴

۳/۳

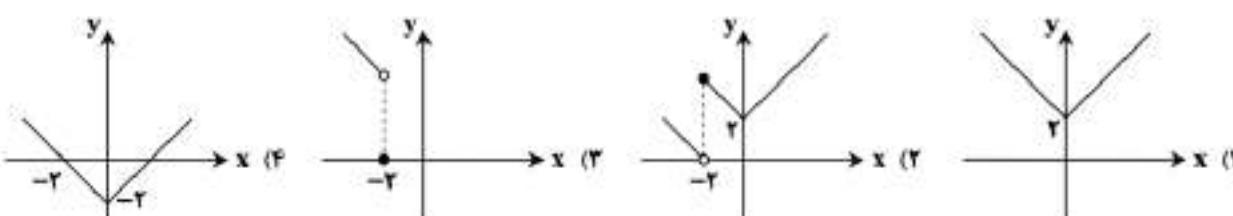
۲/۲

۱/۱



نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ x-2 & x < -2 \end{cases}$  کدام است؟

تست ۸۶



**مسئلہ ۱۳:** تابع  $y = \begin{cases} |x-1| - 2 & x \neq 1 \\ (x-1)^2 - 1 & x = 1 \end{cases}$  را رسم کنید.



**مسئلہ ۸۷:** اگر  $f(x) = x^r + \frac{1}{x^r}$ ، تابع  $|f(\sqrt{x})^r - f(x)|$  چگونه است؟

(ریاضی خارج ۹۱)

- (۱) ثابت
- (۲) همانی
- (۳) فرد
- (۴) یک به یک



۱- نمودار تابع  $|x-4|=y$ ، در بازه‌ی  $(a, b)$  بالاتر از خط به معادله‌ی  $5=2y+x$  قرار دارد. بزرگ‌ترین مقدار  $a-b$  کدام است؟

**مسئلہ ۸۸:**

(ریاضی خارج ۸۶)

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶



در کدام بازه از مقادیر  $x$  نمودار تابع  $f(x) = 5 - |x-1| - 2x$ ، قرار دارد؟

**مسئلہ ۸۹:**

(ریاضی خارج ۹۳)

- (۱)  $(-\frac{2}{3}, 2)$
- (۲)  $(-\frac{4}{3}, 2)$
- (۳)  $(-\frac{2}{3}, 1)$
- (۴)  $(-\frac{4}{3}, 1)$



در بازه  $(a, b)$ ، نمودار تابع  $y = \sqrt{x+2}$ ، در بالای نمودار تابع  $f(x) = |x-1|-2$  قرار دارد. بیشترین مقدار  $(b-a)$  کدام است؟

**مسئلہ ۹۰:**

(ریاضی خارج ۹۴)

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۹





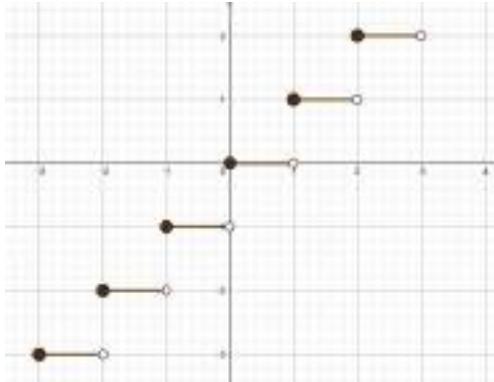
## (۷) توابع جزء صحیح:

تابعی که به هر عدد حقیقی  $x$ ، اولین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن را نسبت دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود. تابع جزء صحیح به صورت  $f(x) = [x]$  نمایش داده می‌شود.

در مورد این تابع داریم:  $D_f = \mathbb{R}$  ،  $R_f = \mathbb{Z}$

نکته: تابع جزء صحیح، تابعی پلکانی است و داریم:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} \dots & \\ -1 & , -1 \leq x < 0 \\ \dots & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x < 2 \\ \dots & \end{cases}$$



مثال:

$$[2] = 2 , [2/5] = 2 , [0/1] = 0 , [\sqrt{3}] = 1 , [-5] = -5 , [-0/1] = -1 , [-3/5] = -4$$

نکته: اگر  $a$  یک عدد صحیح باشد، داریم:

$$[x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1 \quad \text{EX} \quad [x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1$$

$$[x+a] = [x] + a \quad \text{EX} \quad [x+n] = [x] + n$$

نکته: اگر  $a$  یک عدد صحیح باشد، در حالت کلی تساوی‌های زیر برقرار نیست:

$$[x+y] = [x] + [y] , [x-y] = [x] - [y] , [xy] = [x][y]$$

$$\left[ \frac{x}{y} \right] = \left[ \frac{x}{y} \right] , [ax] = a[x] , \left[ \frac{x}{a} \right] = \left[ \frac{x}{a} \right]$$

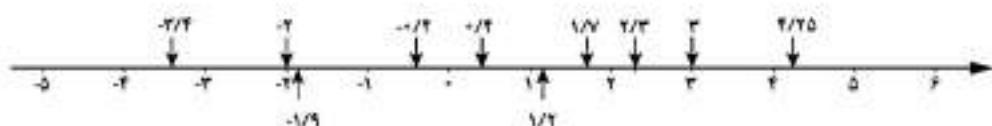
$$\text{EX}) [0/9] + [0/8] = 0 \neq [0/9 + 0/8] = 1 \Rightarrow [x+y] \neq [x] + [y]$$

$$[0/4 \times 5] = [0] = 0 \neq [0/4][5] = 0 \times 5 = 0 \Rightarrow [xy] \neq [x][y]$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Z} \\ -1 & , x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{نکته: برای هر عدد حقیقی } x \text{ داریم:}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تک ۱۴: با توجه به محور زیر، حاصل را بیابید.



$$\begin{array}{lllll} [-\frac{3}{4}] = & [-2] = & [-1/4] = & [0/4] = & [-0/4] = \\ [\frac{4}{25}] = & [2] = & [\frac{2}{3}] = & [\frac{1}{4}] = & [\frac{1}{2}] = \end{array}$$

تست ۹۱:

اگر  $\frac{8}{3} \leq x < -\frac{7}{3}$  ، آنگاه حاصل  $|2x+1|$  کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)

- ۷ (۴)      -۴ (۳)      -۲ (۲)      -۸ (۱)

تک ۱۵

$$f(x) = \begin{cases} -2[x], & x < -2 \\ 3, & -2 \leq x \leq 1 \\ \text{sign}(x), & x > 1 \end{cases}$$

تست ۹۲:

- ۱ (۴)       $2\sqrt{5} + 1$  (۳)      ۲ (۲)      ۶ (۱)

تک ۱۶

تست ۹۳: اگر  $0 < x < 1$  باشد، حاصل عبارت  $A = [x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$  کدام است؟

- ۳ (۴)      -۲ (۳)      -۱ (۲)      ۱) صفر

تک ۱۷

تست ۹۴: مقدار تابع  $f(x) = [x] + [-x]$  به ازای  $x = -1/2$  کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است).

- ۱ (۴)      ۰ (۳)      -۲ (۲)      ۱) صفر

تک ۱۸

تست ۹۵: حاصل  $[2] + [-2/7] - [-\frac{\pi}{4}]$  کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است).

- ۱ (۴)      ۳ (۳)      -۳ (۲)      ۱ (۱)

تک ۱۹

(( هرچه صبر بیشتر باشد، دقیق بیشتر است و هرچه دقیق بیشتر باشد، موفقیت بیشتر است. ))

**تست ۹۶:** حاصل عبارت  $\left[\left(\sqrt{3}-2\right)^{16}\right]+\left[\left(1-\sqrt{2}\right)^{17}\right]+\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^{18}\right]$  کدام است؟

-۲ (۴)      ۱ (۳)      ۲ (۲) صفر      -۱ (۱)



**تست ۹۷:** حاصل  $\left[\left(\frac{37}{41}\right)^3\right]+[(-\frac{13}{51})^5]$  چقدر است؟ ([ نماد جزء صحیح است.)

-۱ (۳)      ۲ (۲)      ۱ (۱)      ۴ (۰) صفر



**تست ۹۸:** اگر  $f(x)=\left[2x\right]-\left[x\right]$ ، حاصل  $f(\frac{5}{3})-f(\frac{1}{3})$  کدام است؟ ([ نماد جزء صحیح است.)

۴ (۰) صفر      ۳ (۳)      ۲ (۲)      ۱ (۱)



**تست ۹۹:** اگر  $\frac{x}{3} < x^2$  باشد، مقدار  $\left[\frac{-x}{5}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]$  چقدر است؟ ([ نماد جزء صحیح است.)

۲ (۴)      ۱ (۳)      ۲ (۰) صفر      -۱ (۱)



**تست ۱۰۰:** مساحت محدود به نمودار تابع  $f(x)=2\left[x\right]+1$  و محور Xها در بازه  $[-1,2]$  چقدر است؟ ([ نماد جزء صحیح است.)

۴ (۰)      ۶ (۳)      ۵ (۲)      ۷ (۱)



نکته: همانطور که در قبل گفته شد داریم:



$$\left[x\right] = a \Rightarrow a \leq x < a+1 , \quad \left[x+a\right] = \left[x\right] + a$$

از این دو نکته برای حل معادلات شامل جزء صحیح استفاده می‌کنیم.

مثال: معادله  $\left[x\right]-1=4$  را حل کنید.

$$4\left[x\right]-1=4 \Rightarrow 4\left[x\right]=1+4 \Rightarrow \left[x\right]=\frac{5}{4}=1.25 \Rightarrow 1.25 \leq x < 2.25$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱) )) "دهن" همه چیز است، به هر چیزی "فکر" کنید "همان" هی شوید.

**شماره:** جواب معادلات زیر را بیابید.

$$[x+3]+1=4$$

$$, 3[x]-2=7$$



$$[-x]+2=6$$

$$, 2[2+x]+4=10$$

$$[x]^2-5[x]=0$$

$$, [x]^2+2[x]-3=0$$

**تست ۱۰۱:**

جزء صحیح عدد  $x$  برابر ۳ شده است. محدوده  $x$  کدام است؟

$$2 \leq x < 3 \quad (4)$$

$$3 \leq x < 4 \quad (3)$$

$$2/9 \leq x < 3 \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \quad (1)$$



**تست ۱۰۲:**

- تابع  $f(x) = [x]$  در محدوده  $3 \leq x \leq 1$  چند مقدار مختلف دارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است).

$$4 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$



**تست ۱۰۳:**

- مجموعه جواب معادله  $[x+3]+[x-1]=10$  کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است).

$$[9,10] \quad (4)$$

$$[5,6] \quad (3)$$

$$[4,5] \quad (2)$$

$$[3,4] \quad (1)$$



**تست ۱۰۴:**

- اگر  $1 = \left[ \frac{x+1}{2} \right] - \left[ \frac{x-3}{2} \right]$  باشد، حاصل [ ] نماد جزء صحیح است.

$$4 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$



**تست ۱۰۵:**

- معادله  $0 = [x] - x^2$  چند جواب دارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است).

$$4) \text{ بی شمار}$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0) \text{ صفر}$$

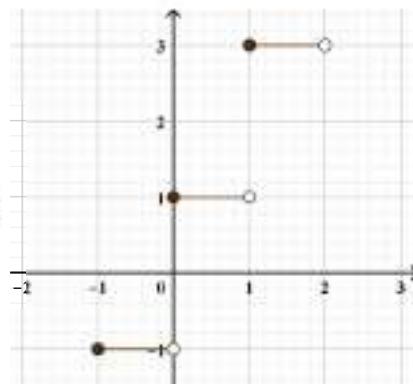


(( شکست بیش از موقوفیت آموزنده است؛ کسی که هیچ گاه اشتباه نمی‌کند، هرگز به جایی نمی‌رسد. ))



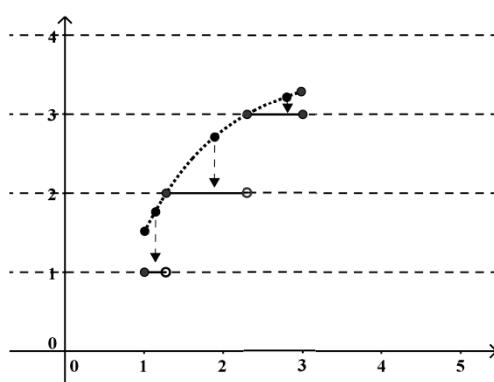
نکته: برای رسم نمودار یک تابع شامل جزء صحیح، باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ای از دامنه به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر  $1 < x \leq 0$  آنگاه  $f(x) = [x] = x$ ؛ پس مقدار تابع اعداد عضو بازه  $(1, 0]$  برابر صفر می‌شود. پس برای رسم توابع جزء صحیح، ابتدا عبارت داخل کروشه را به بازه‌هایی به طول یک دستمبندی می‌کنیم و بعد از یافتن مقدار عددی تابع و محدودیت  $x$ ، به رسم تابع می‌پردازیم.

مثال: تابع  $1 + 2[x]$  را در بازه  $[1, 2]$  رسم کنید.



نکته: روش دیگر برای رسم توابع شامل جزء صحیح این است که بعد از رسم تابع بدون در نظر گرفتن جزء صحیح، تصویر هر قطعه از نمودار که بین دو مقدار از صحیح از برد قرار می‌گیرد را بر عدد صحیح قبل تصویر کنیم.

در نمودار زیر، نقطه چین تابع اصلی و خطوط افقی رسم شده تابع جزء صحیح را مشان می‌بند.



نکته: طول هر گام تابع  $y = [ax]$ ، برابر  $\frac{1}{a}$  است.

((اهم رضا)) : هر کس به خدا خوشگهان باشد، خداوند مطابق گهان او، با وی رفتار هیکند. ( ))

**مثال ۱۷:** تابع  $y = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x < 1 \\ 2[x] + 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2x + 1 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$  را رسم کنید.



**مسئلہ ۱۰۶:** - مساحت بین نمودار تابع  $f(x) = 3[x] + 1$  و محور  $x$ ها در بازه  $[0, 2]$  چقدر است؟ ( ) نماد جزء صحیح است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

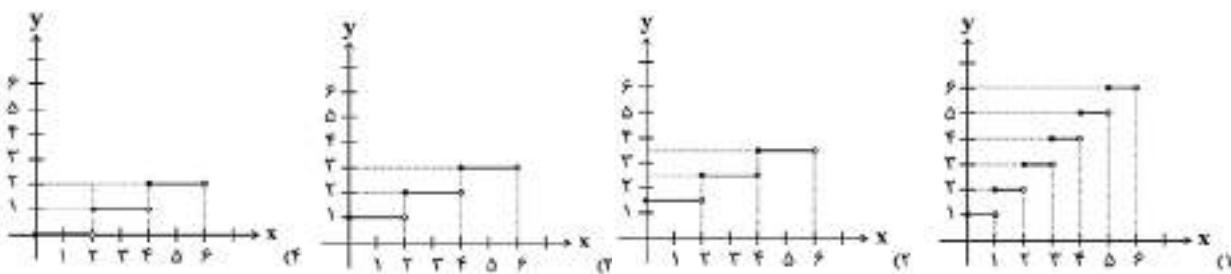


**مسئلہ ۱۰۷:** در یک پارکینگ، هزینه پارک خودرو (برحسب هزار تومان) پس از  $x$  ساعت، با رابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 3 & 1 \leq x < 2 \\ 5 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$  محاسبه می شود. ضابطه

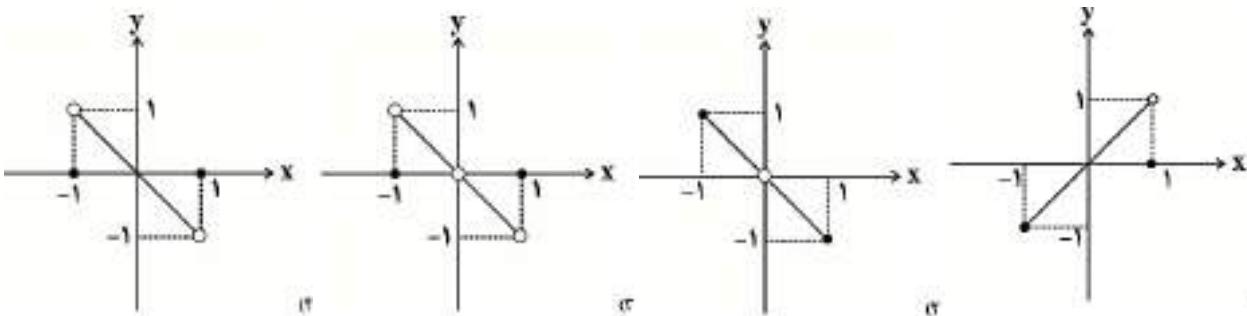
تابع هزینه پارکینگ به ازای  $x \leq 0$  کدام است؟ ( ) علامت جزء صحیح است.

 $f(x) = 3[x] + 1$  (۴) $f(x) = [x] + 2$  (۳) $f(x) = 2[x] + 1$  (۲) $f(x) = [x] + 1$  (۱)

**مسئلہ ۱۰۸:** نمودار تابع  $g(x) = \left[ \frac{x+1}{2} \right]$  در بازه  $[0, 6]$  کدام است؟ ( ) نماد جزء صحیح است.



**مسئلہ ۱۰۹:** نمودار تابع  $y = x([x] + [-x])$  با دامنه  $-1 \leq x \leq 1$  کدام است؟ ( ) نماد جزء صحیح است.





**وارون تابع:** با جایه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب  $(a, b)$  میتوان زوج مرتب  $(b, a)$  را به دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همه زوج‌های مرتب تابع  $f$  را جایه‌جا کنیم، رابطه‌ی جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع  $f$  می‌گوییم و با  $f^{-1}$  نشان می‌دهیم.

**نکته:** وارون یک تابع خود می‌تواند یک تابع باشد یا نباشد.

**نکته:** برای رسم وارون تابع  $f$ ، کافی است وارون آن را نسبت به خط  $y = x$  یعنی نیمساز ناحیه اول و سوم رسم کنیم.

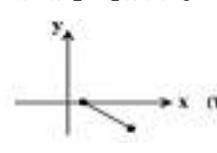
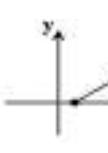
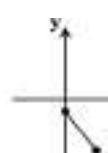
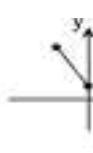
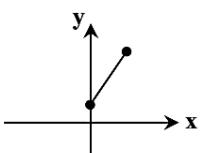
**مثال:** موارد زیر را بیابید.

$$s = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$s^{-1} =$$

$$t = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$t^{-1} =$$



**مسئله:** نمودار وارون تابع رو ببرو، کدام است؟



-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)



$\frac{3}{4}$  (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

$\frac{5}{4}$  (۱)



**مسئله:** در تابع خطی  $f(x) = (a + \Delta)x + b$ ،  $f^{-1}(1) = 2$  و  $f^{-1}(7) = 3$ . مقدار  $a$  کدام است؟

-۷ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۳)

$\frac{13}{4}$  (۱)



**مسئله:** اگر  $f(x) = \frac{r}{x} + a$  باشد و نمودار  $f^{-1}$  از نقطه  $(2, 6)$  بگذرد، مقدار  $(a - r)^{-1}$  کدام است؟

دانلود از سایت ریاضی سرا



تابع یک به یک:

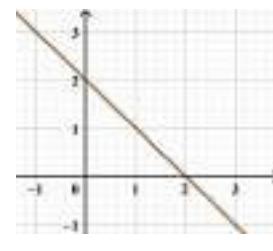
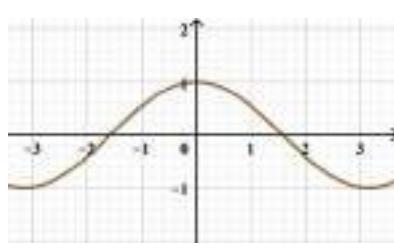
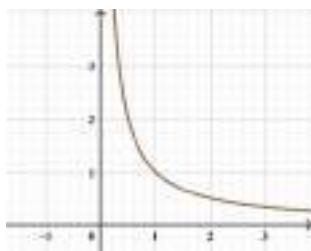
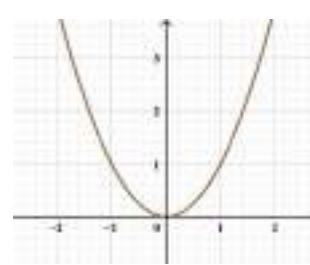
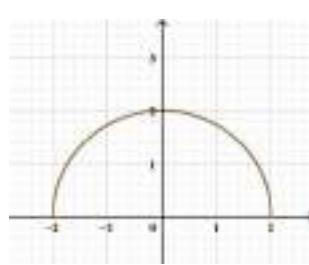
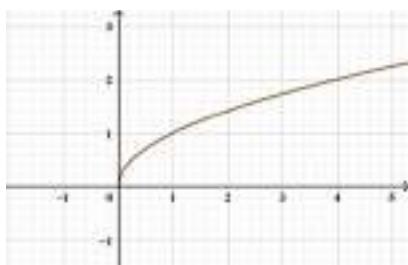
به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گوییم.

نکته: تابع  $f$  یک به یک است هرگاه:  $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ .

نکته: اگر هر خط موازی محور طولها نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع یک به یک است.

نکته: وارون یک تابع یک به یک خود یک تابع است، یعنی هر تابع یک به یک وارون پذیر است.

### مثال ۳:



تسهی: اگر  $f$  تابعی یک به یک باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

-۴ (۱)

۶ (۲)

۴ (۳)

(۰) صفر



تسهی: اگر  $f(x) = \{(1, a^2), (a^2 + 1, 2), (a^2 - 1, -2), (a - 1, 0), (a + 2, 1)\}$  یک به یک باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای  $a$  کدام است؟

$\emptyset$  (۱)

{-2} (۲)

{2} (۳)

{2, -2} (۰)



تسهی: تابع درجه دوم  $f(x) = 2x^2 + 12x + 13$  با کدام یک از شرط‌های زیر وارون پذیر می‌شود؟

$-3 \leq x \leq 3$  (۱)

$x + 3 \leq 0$  (۲)

$|x| \geq 2$  (۳)

$x \in (-\infty, 0]$  (۰)



دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۸:** - تابع  $f(x) = (x-2)(x-4) + 2x$  در کدام یک از بازه‌های زیر یک به یک است؟

$$[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}] \quad (4)$$

$$[1, 5] \quad (3)$$

$$[-1, 2] \quad (2)$$

$$[0, 3] \quad (1)$$



**تست ۹:** اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x \geq 2 \\ x+a & , x < 2 \end{cases}$  وارون یک به یک باشد، حدود  $a$  کدام است؟

$$a \geq 0 \quad (5)$$

$$a \leq 1 \quad (3)$$

$$a \geq 1 \quad (2)$$

$$a = 2 \quad (1)$$



**تست ۱۰:** وسیع‌ترین بازه‌ی  $a$  برای آن‌که تابع  $f(x) = \begin{cases} x+2 & , x \geq 2 \\ -x^2+a & , x < 2 \end{cases}$  وارون یک به یک باشد، کدام است؟

$$(5, +\infty) \quad (2)$$

$$[5, +\infty) \quad (1)$$

$$(-\infty, 5] \quad (4)$$

$$(-\infty, 5) \quad (3)$$



**نکته:** برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند  $f$ ، در معادله  $y = f(x)$ ، ابتدا

متغیر  $x$  را بر حسب متغیر  $y$  محاسبه می‌کنیم. سپس تغییر نام متغیر  $y$  به متغیر  $x$  و برعکس، ضابطه تابع

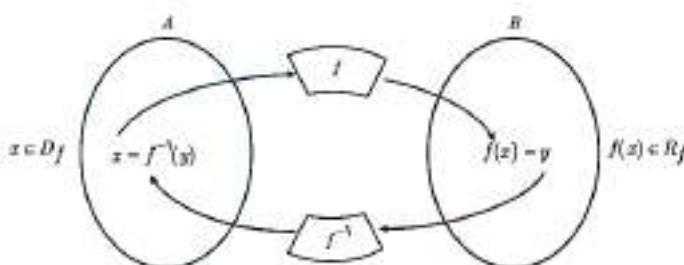
$$y = f^{-1}(x)$$

**مثال:** وارون تابع  $f(x) = 3x - 1$  را بیابید.

$$f(x) = 3x - 1 \Rightarrow y = 3x - 1 \Rightarrow 3x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

**نکته:** داریم:  $D_f = R_{f^{-1}}$  ،  $R_f = D_{f^{-1}}$

**نکته:** نمودار زیر ارتباط بین تابع یک به یک  $f$  و  $f^{-1}$  را نشان می‌دهد.



دانلود از سایت ریاضی سرا

(( کسی که هیخواهد موفقیت بزرگی را به دست آورد، باید به هیزان زیادی فداکاری کند. ))

- ضابطه وارون تابع  $f(x) = \frac{-7x+3}{5}$  کدام است؟

تست ۱۱

$y = \frac{5}{7}x - \frac{3}{7}$  (۴)

$y = \frac{-5}{7}x + \frac{3}{7}$  (۳)

$y = \frac{5}{-7x+3}$  (۲)

$y = \frac{7x-3}{5}$  (۱)



-۴ (۴)

-۳ (۳)

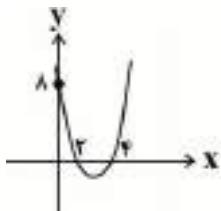
۲ (۲)

۵ (۱)

تست ۱۲

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{b}$  و  $f(x) = 3x-a$  کدام است؟

- اگر وارون تابع  $g(x) = ax+b$  نمودار سهمی زیر را در نقاطی به طول های ۱ و ۳ قطع کند، آنگاه جواب معادله  $g(x) = g^{-1}(x)$  کدام است؟



۱ (۳)  $\frac{5}{3}$  (۱)

$\frac{10}{3}$  (۴) ۲ (۲)

- قرینه خط به معادله  $5 - 4y = 5 - 4x$  تسبیت به نیمساز ربع اول و سوم، خط  $y = ax + b$  است. مقدار  $a + b$  کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

+۰/۵ (۲)

-۰/۵ (۱)

نکته: وارون تابع خطی  $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$  به صورت  $f(x) = ax + b$  (۰  $\neq a$ ) است. پس در مورد شبیه



$m \times m' = a \times \frac{1}{a} = 1$  این توابع داریم:

- اگر  $f$  تابعی خطی با شیب  $m$  باشد، به ازای کدام مقدار  $m$  شبیه تابع  $f^{-1}$  برابر  $m$  است؟ ( $m \neq ۰$ )

±۲ (۲)

(۱) هیچ مقدار

$\pm\frac{1}{2}$  (۴)

±۱ (۳)



چهار عمل اصلی تابع: چهار عمل اصلی برای تابع دلخواه  $f$  و  $g$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال: اگر  $g(x) = x - 2$  و  $f(x) = x + 2$  باشد:

الف) حاصل  $f - g, f + g, g / f$  را بباید.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x+2) + (x-2) = 2x$$

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) = (x-2) - (x+2) = -4$$

$$(g/f)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x-2}{x+2}$$

ب) حاصل  $(gf)(4), (f+g)(2), (g-f)(3)$  را بباید.

$$(gf)(4) = g(4)f(4) = (4-2)(4+2) = 12$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = (2+2) + (2-2) = 4$$

$$(g-f)(3) = g(3) - f(3) = (3-2) - (3+2) = -4$$

نکته: برای یافتن دامنه این توابع از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g, \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \left\{ x \mid g(x) = 0 \right\}$$

مثال: اگر  $g(x) = 1 - \frac{x}{2}$  و  $f(x) = 2x + 1$  باشد:

الف) حاصل  $fg, f+g, f/g$  را بباید.



ب) حاصل  $(gf)(6), (f+g)(4), (f/g)(0)$  را بباید.

نکته: اگر  $f(x) = 2x - 1$  و  $g(x) = x - 2$  دامنه تابع  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  کدام است؟

$$R - \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\} \quad (4)$$

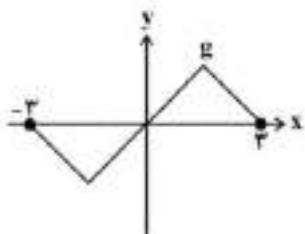
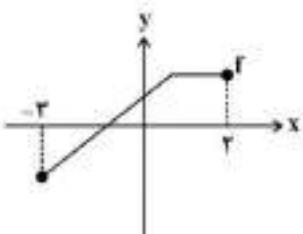
$$R - \{2\} \quad (3)$$

$$R - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad (2)$$

$$R \quad (1) \quad \text{کاملاً}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

(()) هر کس خواهان موفقیت است باید یاد بگیرد که ناکاهی جزء حتی فرایند پیشرفت است. (())



با توجه به تابعهای  $f$  و  $g$ ، دامنه تابع  $\frac{\sqrt{f}}{g}$  کدام است؟

(-) (-, 2) (T)

(+) (0, 2) (T)



(-) (-2, 0) ∪ (0, 2) (T)

(+) [-2, 2] (T)



باشد، تابع  $g(x) = \begin{cases} x & , & |x| < 2 \\ \frac{1}{x} & , & x < -2 \\ 1 & , & x > 2 \end{cases}$  کدام است؟

(-)  $\begin{cases} x^2 & , & 1 < x < 2 \\ 1 & , & x < -2 \end{cases}$  (T)

(+)  $\begin{cases} x^2 & , & 1 < x < 2 \\ 1 & , & x < -2 \end{cases}$  (T)

(-)  $\begin{cases} x^2 & , & -2 < x < 2 \\ x & , & x < -2 \end{cases}$  (T)

(+)  $\begin{cases} 1 & , & 1 < x < 2 \\ x^2 & , & x < -2 \end{cases}$  (T)



اگر داشته باشیم  $h(x) = \frac{f(x)+g(x)}{g(x)}$  شامل دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{x-1}$  و  $f(x) = \sqrt{3-x}$  می‌باشد؟

(-) ۲ (T)

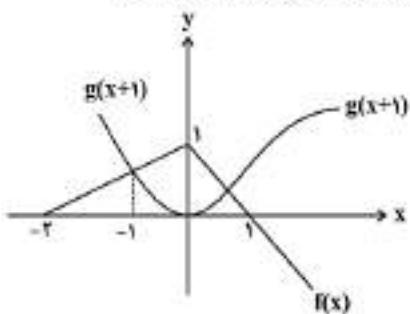
(+) ۱ (T)

(+) ۰ (T)

(+) صفر (T)



نمودار توابع  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$  باشد، آنگاه حاصل  $(\cdot)$  کدام است؟



(+) ۱ (T)

(+)  $\frac{1}{2}$  (T)

(+)  $\frac{3}{2}$  (T)

(+) ۳ (T)

اگر  $f$  و  $g$  دو تابع خطی باشند و  $(f-g)(x) = 2-x$ ,  $(f+g)(x) = 3x+1$  باشد، مقدار  $\left(\frac{f}{g}\right)(\varphi)$  کدام است؟

(-)  $\frac{15}{22}$  (T)

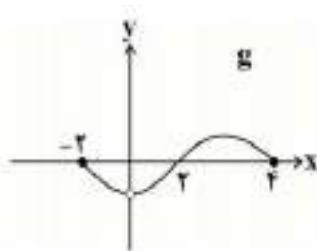
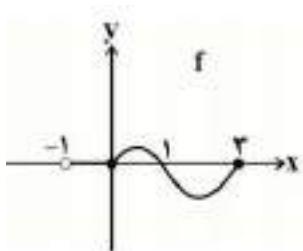
(+)  $\frac{17}{14}$  (T)

(+)  $\frac{25}{18}$  (T)

(+)  $\frac{9}{11}$  (T)



(()) همه چیز به طرز بخورد و نگرش شما بستگی دارد، مسایل هیئت‌واند شما را با هشکل یا با موقوفیت رو به رو سازند. ))



$$y = \sqrt{\left(\frac{f}{g}\right)(x)}$$

((1,2) (3) (-1,0) (1,1,2) (2) ))

(((-1,0) (4) (-1,2) - {0}) (5) ))

**ست: ۷**



$$\text{اگر } g(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \text{ و } f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ کدام است؟}$$

**ست: ۸**



$$R - \left\{ 2, 1, \frac{1}{2} \right\} (6)$$

$\emptyset$  (1)

$$R - \{ 2, 0 \} (7)$$

$$R - \{ 2 \} (8)$$

$$\text{اگر } \frac{(f+g)(a)}{(f+g)(b)} \text{ کدام است؟}$$

**ست: ۹**



$$\frac{3a+\Delta}{b-1} (9)$$

$$\frac{3a-\Delta}{-b-1} (1)$$

$$\frac{3a+\Delta}{b+1} (4)$$

$$\frac{a+1}{-b-1} (5)$$

$$\text{اگر } g(x) = 1 + \sqrt{x} \text{ و } f(x) = x - \sqrt{x} \text{ کدام است؟}$$

**ست: ۱۰**



$$[0, +\infty) (2)$$

$$R (1)$$

$$[1, +\infty) (4)$$

$$(-\infty, -1] (3)$$

$$\text{· توابع } f-g \text{ مفروض‌اند. برد تابع } g(x) = \frac{x^2+1}{x} \text{ و } f(x) = \frac{x+1}{x} \text{ کدام است؟}$$

**ست: ۱۱**



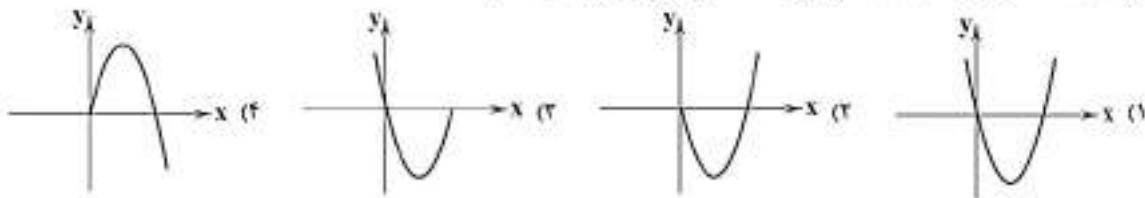
$$R - \{ 1 \} (2)$$

$$R - \{ 0 \} (1)$$

$$R (4)$$

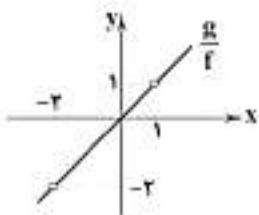
$$R - \{ -1 \} (3)$$

ستمه

اگر  $g(x) = \sqrt{x}$  باشد، نمودار تابع  $(f-g)(x)$  کدام است؟

ک

ستمه

اگر  $\frac{g}{f}(x) = ax^2 + b$  به صورت زیر باشد، مقدار  $a$  چقدر است؟

ک

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۵ (۵)

ک

ستمه

اگر  $f(x)$  تابع خطی و  $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، در صورتی که نمودار  $(f+g)(x)$  یک سهمی که رأس آن روی محور  $y$ ها قرار داشته و هم‌جهان  $-2 \cdot (f-2g)(x) = -2$  باشد، تابع  $f$  محور  $x$ ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱ (۱)

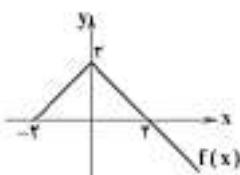
۲ (۲)

۳ (۳)

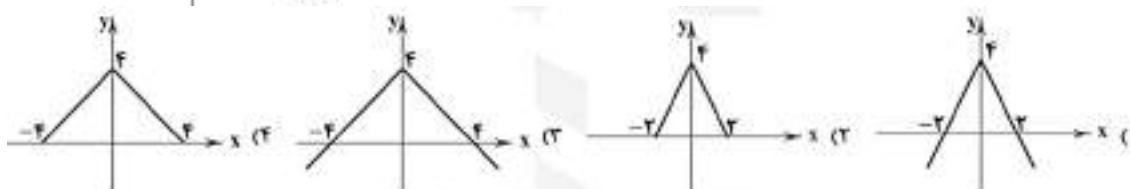
۴ (۴)

ک

ستمه

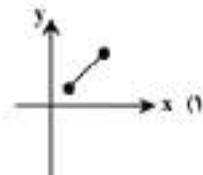
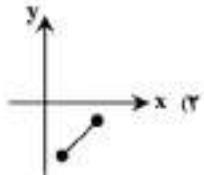
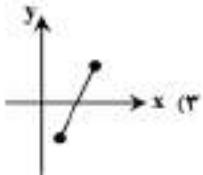
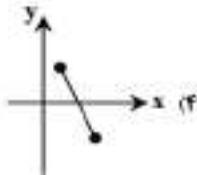
اگر نمودار  $f(x)$  به صورت زیر باشد، نمودار  $f(x) + f(-x)$  چگونه است؟

ک



ک

ستمه

اگر  $y = f(x) \cdot g(x)$ ، نمودار تابع با خواص  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$  و  $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}$  کدام است؟

ک

دانلود از سایت ریاضی سرا



نکته: در مثال‌های عددي، ابتدا اشتراك دامنه تابع را مي‌بایيم و سپس برای  $x$ ‌هاي يكسان،  $y$ ‌ها را جمع يا ... مي‌کنيم.

مثال: اگر  $g = \{( -1, 2 ), ( 2, 0 ), ( 2, 2 )\}$  و  $f = \{ ( 2, 2 ), ( 2, -1 ), ( 5, -1 )\}$

$$1) D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{ 2, 2 \}$$

$$2) f + g = \{ ( 2, 2 + 0 ), ( 2, -1 + 2 ) \} = \{ ( 2, 2 ), ( 2, 1 ) \}$$

$$3) f / g = \left\{ \left( 2, \frac{2}{2} \right), \left( 2, \frac{-1}{2} \right) \right\} = \left\{ \left( 2, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$4) gf = \{ ( 2, 0 \times 2 ), ( 2, 2 \times -1 ) \} = \{ ( 2, 0 ), ( 2, -2 ) \}$$

**مثال ۲:** اگر  $g = \{ ( 2, 5 ), ( 3, -1 ), ( -1, 2 ) \}$  و  $f = \{ ( 2, 0 ), ( 4, -1 ), ( -1, 3 ) \}$

$$f + g = , f \times g =$$

$$f - g = , g - f =$$

$$f / g = , g / f =$$

**مسئلہ ۱۷:** اگر  $g = \{ (\frac{1}{2}, 2 ), ( 2, -2 ), ( 1, 5 ) \}$  و  $f = \{ ( 1, 2 ), ( -2, 2 ), ( \frac{1}{2}, 1 ) \}$  کدام است؟

$$\{ \frac{1}{2}, 3 \} \quad (4)$$

$$\{ 3 \} \quad (3)$$

$$\{ \frac{1}{2}, 1 \} \quad (2)$$

$$\{ \frac{1}{2}, 3, 1, -2 \} \quad (1)$$



**مسئلہ ۱۸:** اگر  $\frac{g}{f}$ ، دامنه تابع  $g = \{ ( 2, 5 ), ( 3, -1 ), ( -1, 0 ) \}$  و  $f = \{ ( 2, 0 ), ( 4, -1 ), ( -1, 3 ) \}$  کدام است؟

$$\{ -1 \} \quad (4)$$

$$\emptyset \quad (3)$$

$$\{ 2, 3, 4, -1 \} \quad (2)$$

$$\{ 2, -1 \} \quad (1)$$



**مسئلہ ۱۹:** اگر  $f + g$ ، تابع  $g = \{ ( -1, 2 ), ( 0, 3 ), ( 2, 4 ), ( 3, 0 ) \}$  و  $f = \{ ( 2, 5 ), ( 3, 4 ), ( 0, -2 ) \}$  کدام است؟

$$\{ ( 2, 9 ), ( 3, 4 ), ( 0, 1 ) \} \quad (4)$$

$$\{ ( 2, 9 ), ( 3, 4 ) \} \quad (3)$$

$$\{ ( 2, 7 ), ( 3, 4 ) \} \quad (2)$$

$$\{ ( 2, 7 ), ( 3, 4 ), ( 0, -2 ) \} \quad (1)$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

((علقه، اندیشه و مطالعه چیزهایی هستند که شما را به سوی موفقیت سوق می‌دهند.))

**ست: ۲۰** اگر  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1+x}}$  باشد، دامنهٔ تابع  $\frac{g}{f}$  چند عضو دارد؟

۱ (۴)

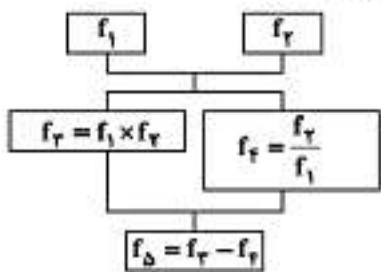
۴ (۳)

۷ (۲)

۱۲ (۱)



۱۱- اگر  $f_1(x) = x+1$  و  $f_2(x) = x-1$  باشند، توجه به درخت رویدرو، حاصل  $f_5(x)$  بجزای  $x=2$  کدام است؟



۱ (۱)

۴ (۳)

۵ (۳)

۷ (۳)



**ست: ۲۱** اگر  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(x) = x$  کدام است؟

{(3, -3), (-2, 0)} (۴)

{(3, 3), (-2, 0)} (۳)

{(-1, 3), (4, 0)} (۲)

{(-1, -1), (4, 2)} (۱)



**ست: ۲۲** اگر  $\frac{f}{g} = \{(1, 1)\}$  و  $g = \{(2, a), (4, -1), (1, 2)\}$ ، آنگاه مقدار  $a$  کدام است؟

۴ صفر

-1 (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



**ست: ۲۳** اگر  $\frac{4}{f^2} = \{(0, 4), (-1, 1)\}$  و  $f = \{(-1, a), (0, 1), (1, b)\}$  باشد، آنگاه  $a^2 - b^2$  کدام است؟

-4 (۲)

۴ (۱)



-3 (۴)

۳ (۳)



**ست: ۲۴** اگر  $f + g = \{(2, 5), (4, 3)\}$  و  $f = \{(2, 3), (3, -1), (4, 2)\}$  کدام است؟

{(2, 5), (4, 3)} (۲)

{(2, -2), (4, -1)} (۱)



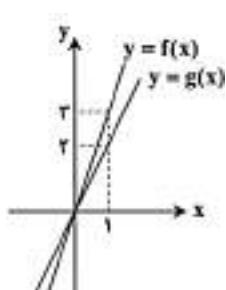
{(2, 1), (4, 1)} (۴)

{(2, 1), (4, 1), (3, -1)} (۳)



- تست ۲۶:** اگر  $\{f, g\}$  تابع کدام است؟
- $f = \{(2, 4), (4, 6), (5, 0)\}$  و  $g = \{(5, -2), (7, 0), (6, 1), (2, 0)\}$
- $\{(2, 2), (5, -2)\}$  (۲)
  - $\{(2, 4), (5, 0), (0, 5)\}$  (۱)
  - $\{(2, 0), (5, 0)\}$  (۳)

- تست ۲۷:** اگر  $\frac{f^{-1} + g}{f + g}$  چند عضو دارد، تابع  $y = f + g$  دارای صفتی کدام است؟
- $f = \{(-1, 2), (2, -1), (1, 1), (-2, 2), (1, -3)\}$  و  $g = \{(2, -1), (2, 2), (-1, 1), (-1, -1), (1, 1)\}$
- $y = \frac{3}{2}x$  (۲)
  - $y = \frac{3}{2}x$  (۱)
  - $y = \frac{1}{2}x$  (۳)
  - $y = 4x$  (۴)



- تست ۲۸:** دو تابع خطی  $f(x)$  و  $g(x)$  به صورت زیر داده شده‌اند. ضابطه تابع  $y = (f + g)(x)$  کدام است؟
- $y = 5x$  (۳)       $y = \frac{3}{2}x$  (۱)
- $y = \frac{1}{2}x$  (۲)       $y = 4x$  (۴)

- تست ۲۹:** اگر  $y = f(x) - g(x)$  ضابطه تابع  $y = f(x) - g(x)$  کدام است؟
- $f(x) = \begin{cases} 5x & x < 2 \\ x & x \geq 2 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$
- $y = \begin{cases} -x & x < 1 \\ -3x & 1 \leq x < 2 \\ -2x & x \geq 2 \end{cases}$  (۲)
  - $y = \begin{cases} -2x & x < 1 \\ -3x & 1 \leq x < 2 \\ -x & x \geq 2 \end{cases}$  (۱)
  - $y = \begin{cases} -2x & x < 1 \\ -3x & 1 \leq x < 2 \\ -x & x \geq 2 \end{cases}$  (۴)
  - $y = \begin{cases} 5x & x < 1 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$  (۳)

- محل ۳:** اگر  $h(x) = -x$ ,  $g(x) = x$ ,  $f(x) = \text{sign}(x)$  باشد، ضابطه توابع  $hg$ ,  $fg$ ,  $fh$  را بیابید و نمودار آنها را رسم کنید.

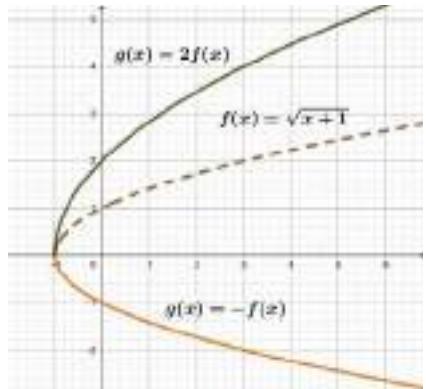
- محل ۴:** اگر  $h(x) = -x^3$ ,  $g(x) = x^3$ ,  $f(x) = \text{sign}(x)$  باشد، ضابطه توابع  $fg$ ,  $fh$  را بیابید نمودار آنها را رسم کنید.

(( اهم محمد باقر(ع): هیچ کس به موهب و رحمت‌های الهی نمی‌رسد هرگز با عدل. ))



نکته: اگر  $k$  عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = kf(x)$  کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه  $y = f(x)$  را  $k$  برابر کنیم.

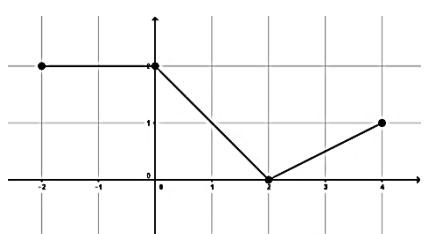
نکته: برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = -f(x)$  کافی است قرینه نمودار تابع ضابطه  $y = f(x)$  را نسبت به محور طولها رسم کنیم.



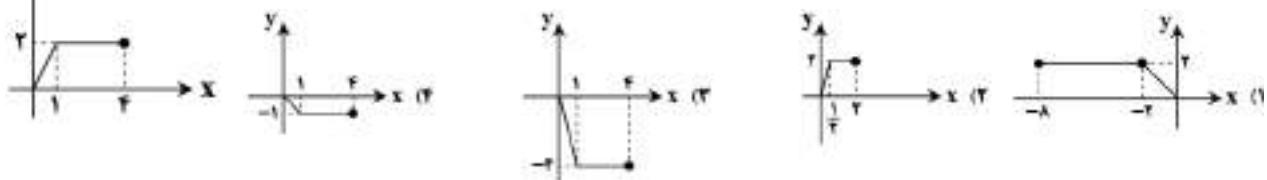
مثال: اگر  $f(x) = \sqrt{x+1}$  باشد،

نمودار توابع  $h(x) = -f(x)$ ,  $g(x) = 2f(x)$  را رسم کنید.

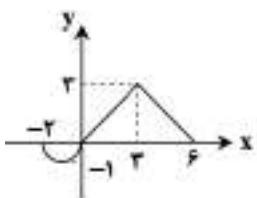
**مثال:** نمودار زیر مربوط به تابع  $f(x)$  است. تابع  $f(x+2), 2f(x), -f(x)+2, -2f(x-1)+2$  را رسم کنید.



**مسئلہ ۳۰:** نمودار مقابل مربوط به تابع  $y = f(x)$  است. کدام گزینه نمودار  $y = -2f(x)$  را نشان می‌دهد؟



**مسئلہ ۳۱:** شکل مقابل نمودار تابع  $y = f(x+2)$  است. نمودار تابع  $y = 2f(x+1)$  در چند نقطه نمودار تابع  $y = f(x)$  را قطع می‌کند؟



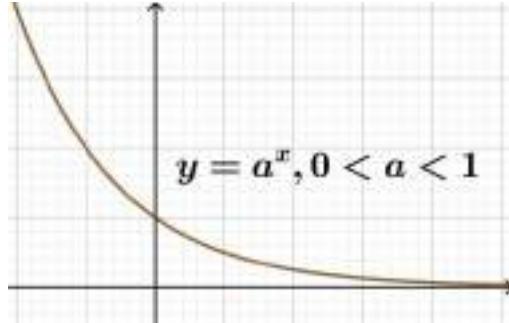
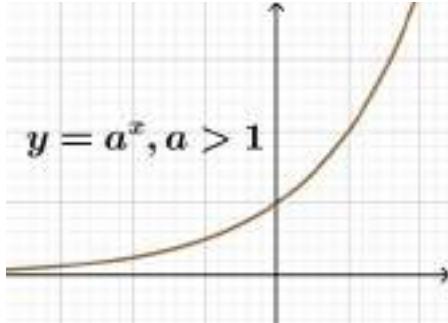
- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)



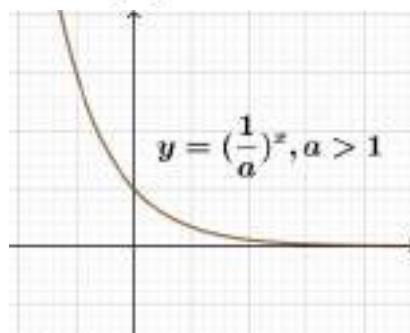
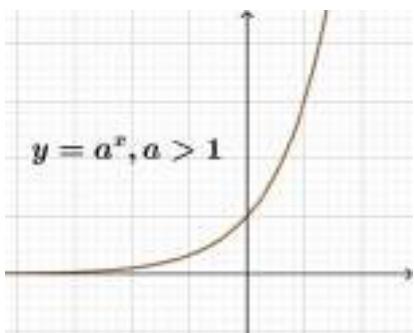
دانلود از سایت ریاضی سرا



توابع نمایی: شکل کلی این توابع به صورت  $f(x) = a^{x+b} + c$  است که در آن  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است. در زیر نمودار تابع  $f(x) = a^x$  رسم شده است:



نکته: توابع  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$  و  $y = a^x$  نسبت به محور  $y$  ها فرینه هستند.



نکته: در توابع نمایی اگر  $a > 1$  این توابع صعودی و اگر  $a < 1$  نزولی هستند.

نکته: دامنه و برد تابع  $f(x) = a^x$  به صورت مقابل است:  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = (0, +\infty)$

نکته: دامنه و برد تابع  $f(x) = a^{x+b} + c$  به صورت مقابل است:  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = (c, +\infty)$

**مثال:**

کدامیک از توابع زیر نمایی هستند. دامنه و برد و صعودی یا نزولی بودن آنها را مشخص کنید.

a)  $f(x) = x^2 + x$

, b)  $g(x) = 1 + 3^x$



c)  $h(x) = 2^{-x} - 3$

, d)  $i(x) = 5^{x+3} + 4$

e)  $j(x) = (-2)^x$

, f)  $k(x) = 4^{1-x}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

(( اهم صادق (ع) : هر کس با این سه نفر کشکش کند خوار هیگردد: پدر، سلطان حق و شخص بدھکار. ))

**ستاد:** مقدار تابع نمایی  $y = (\frac{1}{a})^x$  به ازای ..... با افزایش مقدار  $x$  رو به ..... است.

(۲)  $a < 1$  - کاهش

(۱)  $a > 0$  - افزایش

(۴)  $-1 < a < 0$  - کاهش

(۳)  $a > 1$  - کاهش

**ستاد:** - اگر نمودار دو تابع نمایی  $f(x) = (a+1)^x$  و  $g(x) = (3a-7)^{-x}$  نسبت به محور  $y$  ها قرینه یکدیگر باشند،  $a$  کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{5}{2}$  (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

۵ (۱)



رسم توابع نمایی: برای رسم توابع نمایی از نقطه یابی با حداقل سه نقطه استفاده می‌کنیم. این سه نقطه را

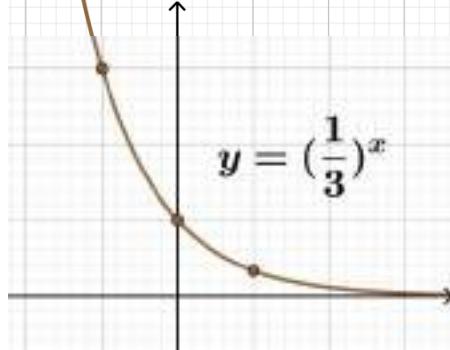
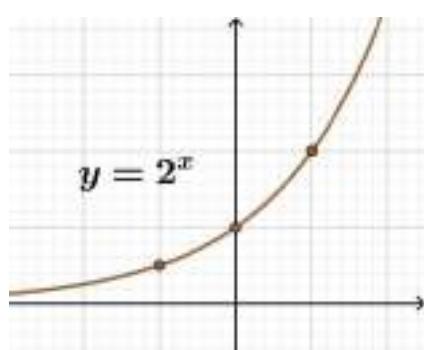
می‌توانیم برای تابع  $f(x) = a^x$  به صورت زیر تعیین کنیم:

$x$	-1	0	1
$f(x) = a^x$	$\frac{1}{a}$	1	$a$

مثال: توابع  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ،  $y = 2^x$  را رسم کنید.

$x$	-1	0	1
$y = 2^x$	$\frac{1}{2}$	1	2

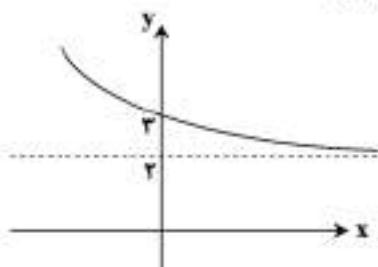
$x$	-1	0	1
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	3	1	$\frac{1}{3}$



نکته: برای رسم توابع نمایی با ضابطه  $f(x) = a^{x+c} + b$  ابتدا تابع  $f(x) = a^x$  را رسم کرده و سپس نمودار تابع را به اندازه  $c$  واحد به سمت چپ یا راست (مخالف علامت  $c$ ) و  $b$  واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۳:** در دستگاه مختصات روبه‌رو، نمودار تابع با خصیطه  $f(x) = a + (\frac{1}{x})^{x-b}$  رسم شده است. a, b کدام است؟



۱ (۰)

۲ (۲)

۳ (۳)

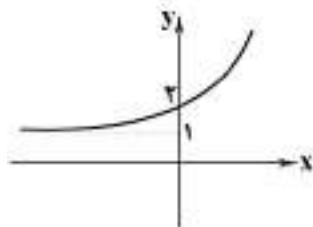
۴) صفر



**تست ۴:** بهارای تمام مقادیر حقیقی  $x$ ، نقطه  $(x+1, e^x)$  را در دستگاه مختصات مشخص کرده‌ایم. نمودار به دست آمده، کدام است؟



**تست ۵:** اگر نمودار تابع  $f(x) = a + e^{x+k}$  به صورت زیر باشد، آن‌گاه  $a + e^{-1}$  چقدر است؟



۱ (۱)

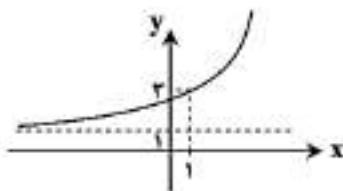
۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



**تست ۶:** در دستگاه مختصات روبه‌رو، نمودار  $f(x) = a + e^{x-b}$  رسم شده است. مقدار  $a + b$  کدام است؟



۱ (۰)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



**تست ۷:** نمودار تابع  $f(x) = x^3$  و  $g(x) = 2^x$  در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱ (۰)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



**تست ۸:** نمودارهای  $f(x) = (\frac{1}{2})^{ax-1}$  و  $g(x) = 32^{x-1}$  در نقطه‌ای به عرض  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  متقاطع‌اند. در این صورت a کدام است؟

 $\frac{7}{10}$  (۰) $\frac{14}{25}$  (۲) $\frac{7}{25}$  (۲) $\frac{25}{7}$  (۱)



نکته: در حالت کلی داریم:

$$\left(a > 1, a^x > a^y\right) \Leftrightarrow x > y \quad , \quad \left(0 < a < 1, a^x > a^y\right) \Leftrightarrow x < y$$

مثال: اگر  $3^y < 3^x$  آنگاه داریم:  $y < x$  و اگر  $(0/3)^x < (0/3)^y$  آنگاه داریم:  $y < x$ .

تست ۹:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} > \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2y} \quad (4)$$

$$5^{-x} > 5^{-y} \quad (3)$$

$$3^{x-1} > 3^{y-1} \quad (2)$$

$$2^{x+1} > 2^{y+1} \quad (1)$$



تست ۱۰: اگر عدد  $\frac{1}{2}^{a-1}$  کوچک‌تر از  $1/25$  باشد، محدوده  $a$  کدام است؟

$$a < 2 \quad (4)$$

$$a > 4 \quad (3)$$

$$a < 4 \quad (2)$$

$$a > 2 \quad (1)$$



تست ۱۱: کدام گزینه نادرست است؟

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}} \quad (4)$$

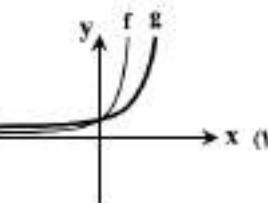
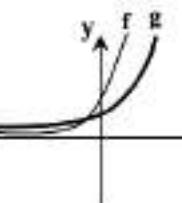
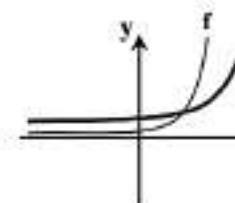
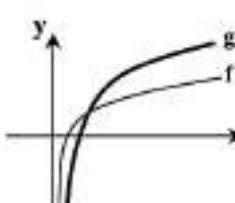
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{3}} \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}} = 3^{-0/4} \quad (2)$$

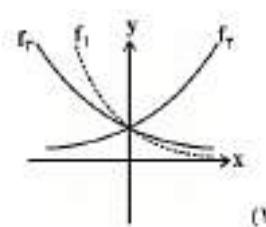
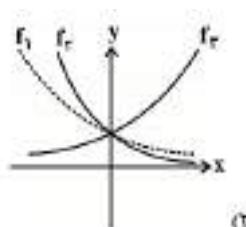
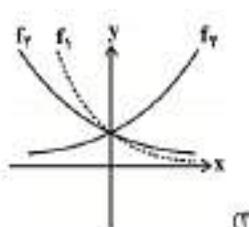
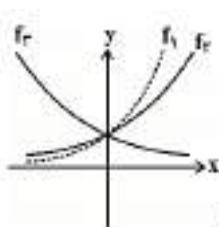
$$4^{\sqrt{7}} > 4^{\sqrt{6}} \quad (1)$$

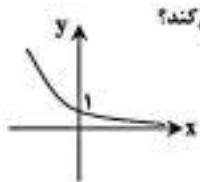


تست ۱۲: در کدام‌یک از موارد زیر نمودار دو تابع  $f(x) = 2^{x-t}$  و  $g(x) = 2^{x-t}$  نسبت به هم درست رسم شده است؟



تست ۱۳: اگر  $f_3(x) = c^x$  و  $f_1(x) = b^x$  و  $f_7(x) = a^x$  باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟





- نمودار تابع  $f(x) = (2 - m)^x$  به صورت رو به رو است. چند عدد طبیعی  $x$  در نامساوی

?

صدق می‌کند؟

۵ (۲)

(۱) بین شمار

۷ (۴)

۶ (۳)

نکته: توابع نمایی یک به یک هستند. یعنی به ازای هر  $y$  از برد آنها، فقط یک  $x$  از دامنه یافت می‌شود.



تعریف و نکته: معادلاتی را که در آنها متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادله نمایی می‌نامیم. با استفاده از خاصیت یک به یک بودن توابع نمایی خواهیم داشت:

$$\left( a > 0, a^{x_1} = a^{x_2} \right) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال: معادلهای  $4^{x+3} = 2^{x+5}$ ,  $4^{x+2} = 16$  حل کنید.

$$1) \quad 4^{x+3} = 16 \Rightarrow 4^{x+3} = 4^4 \Rightarrow x+3=4 \Rightarrow x=-1$$

$$2) \quad 4^{x+3} = 2^{x+5} \Rightarrow 2^{4(x+3)} = 2^{x+5}$$

$$\Rightarrow 2^{4x+12} = 2^{x+5} \Rightarrow 4x+12 = x+5 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$3) 2^{2x+7} = 8 \cdot 2^x, \quad 4) 5^{4-x} = 125^{x+2}$$

$$5) 2^{2x+7} = 4^{2x}$$

$$, \left(\frac{1}{2}\right)^{6x-1} = 3 \cdot 2^{3x}$$

تست‌ها: معادله  $0 = 1 + 4^{-x} - 2^{x+1}$  چند ریشه دارد؟

۱) ۴ (۲)

۲) ۳

۳) صفر

۴) بیشمار

دانلود از سایت ریاضی سرا

((پیامبر اکرم(ص): در پی روزی و نیازها، سحر خیز باشد، چرا که حرکت در آغاز روز، [هایه] برکت و پیروزی است.))

**تست ۱۷:** - معادله  $9^x - 4x^2 = 3^x$  چند ریشه دارد؟

۴) بی‌شمار

۳) صفر

۲) ۲

۱) ۱



**تست ۱۸:** - اگر  $f(x) = 4^x + 2$  و  $f(-1) \cdot f(a)$  مقدار a کدام است؟

-۳) ۴

۳) ۳

۲) ۲

-۲) ۱



**تست ۱۹:** در تابع با ضابطه  $f(x) = ab^x$ ;  $b > 0$  داریم  $f(-2) = \frac{3}{32}$ ,  $f(0) = \frac{3}{2}$  مقدار f(۲) کدام است؟

۲۶) ۴

۱۲) ۳

۸) ۲

۶) ۱

(تجربی ۹۱)



**تست ۲۰:** - در تابع با ضابطه  $f(x) = ab^x$ ,  $b > 0$ . آن‌گاه مقدار  $f(-1)$  کدام است؟

 $\frac{1}{16}) ۴$ 

۱۶) ۳

۲۲) ۲

 $\frac{1}{2}) ۱$ 

(گزینه ۲)



**تست ۲۱:** از دستگاه  $\begin{cases} 4^x + 4^y = \sqrt{2} \\ 4^y + 4^x = 4x + 19 \end{cases}$  حاصل کدام است؟

۱) ۴

-۲) ۳

۴) ۲

-۱) ۱

(گزینه ۲)



**تست ۲۲:** اگر تابع  $f(x) = 3 \times 4^{ax+b}$  محور y را در ۲ قطع کند و  $f(-1) = \frac{3}{\sqrt{2}}$  باشد، آن‌گاه جواب معادله  $a + b$  کدام است؟

 $-\frac{7}{8}) ۴$  $-\frac{5}{8}) ۳$  $\frac{5}{8}) ۲$  $\frac{7}{8}) ۱$ 

دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۲۲:** - اگر  $3^x + 9 = 10 \times 3^{2x}$ ، آنگاه مقدار  $1 - 3^x$  کدام می‌تواند باشد؟

(۴) صفر

۸+ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)



**تست ۲۳:** - اگر  $\frac{3^{x+y}}{3^{5y}} = 243$  و  $\frac{4^x}{3^{x+y}} = 8$  مقدار  $xy$  کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۱۲ (۲)

 $\frac{12}{5}$  (۱)

یک کاربرد از توابع نمایی: توابعی به صورت  $f(x) = ka^x$ ، ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) مانند یک تابع نمایی رفتار می‌کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می‌شود.



**نکته:** اشريشياکلی ( $E.coli$ ) نوعی باکتری است که به طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می‌کند و تکثیر آن به صورت نمایی است. سرعت تکثیر این باکتری از رابطه  $f(x) = 100 \times 2^{xt}$  ( $0 \leq t \leq 16$ ) بدست می‌آید که در آن  $t$  بر حسب ساعت است.

**مسئلہ ۳:** نسبت تعداد باکتری موجود در یک توده اشريشياکلی حاصل از ۱۰۰ باکتری اولیه را، بعد از نیم ساعت و بعد از یک و نیم ساعت را با

یکدیگر مقایسه کنید.



باکتری  $E.Coli$  با رابطه  $P(t) = 100 \times 2^{7t}$  در دستگاه گوارش زندگی و رشد می‌کند ( $t$  بر حسب ساعت و  $0 \leq t \leq 16$  است). چند ساعت پس از شروع رشد، تعداد این باکتری ۱۶ برابر می‌شود؟

۷ (۷)

۸/۵ (۸)

۹ (۹)

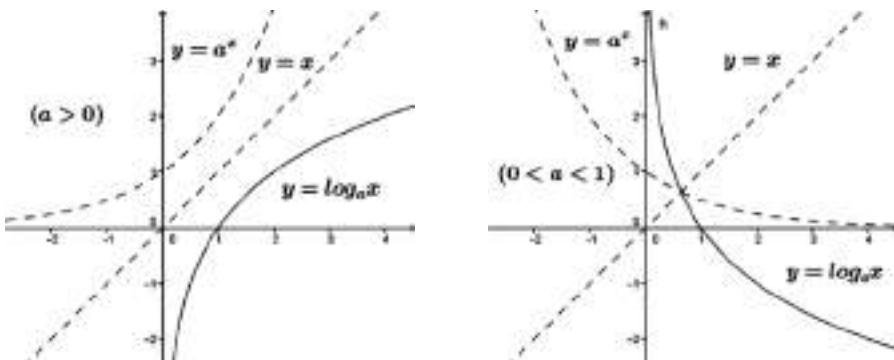
۱۰ (۱۰)





تابع لگاریتم: وارون تابع نمایی با ضابطه  $f(x) = a^x$  نشان می‌دهیم و آنرا لگاریتم  $x$  در پایه  $a$  مینامیم.

نکته: در حالت کلی داریم:

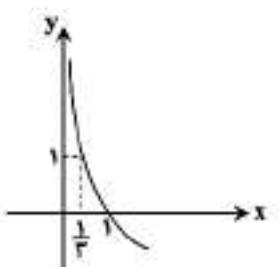


یعنی تابع  $f(x) = \log_a x$  در صورتی که  $a > 1$  صعودی و در حالت  $0 < a < 1$  نزولی است.

نکته: واضح است که توابع لگاریتمی نیز مانند توابع نمایی یک به یک هستند.

نتیجه:

ضابطه تابع مقابله کدام می‌تواند باشد؟



$$y = \left(\frac{1}{\tau}\right)^x \quad (1)$$

$$y = \tau^x \quad (2)$$

$$y = \log_{\tau} x \quad (3)$$

$$y = \log_{\frac{1}{\tau}} x \quad (4)$$



نتیجه:

نمودار توابع  $y = 2^{-x}$  و  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  نسبت به ..... قرینه‌اند.

۱) محور طول‌ها



۲) محور عرض‌ها



۳) نیمساز ربع اول و سوم



۴) نیمساز ربع دوم و چهارم

تبدیل عبارات نهایی به لگاریتمی و بر عکس:

با استفاده از رابطه زیر می‌توانیم عبارات نهایی و لگاریتمی را به یکدیگر تبدیل کنیم:

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

نکته: برای محاسبه مقادیر توابع لگاریتمی از رابطه بالا استفاده می‌کنیم.

مثال: مقدار عددی عبارت‌های  $\log_2 \sqrt{2}$ ,  $\log_5 25$ ,  $\log_{10} 1000$ ,  $\log_{10} x$  را بیابید.

$$\log_5 25 = x \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 2, \quad \log_{10} 1000 = x \Rightarrow 10^x = 1000 \Rightarrow x = 3$$

$$\log_2 \sqrt{2} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

نکته: لگاریتم در پایه عدد ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم و در این حالت پایه را نمی‌نویسیم. یعنی:

$$\log_{10} x = \log x$$

مثال: به صورت لگاریتمی یا نمایی تبدیل کنید.

$$\log_{10} 100 = 2$$

$$6^2 = 36$$

$$\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$$

$$4^{-3} = \frac{1}{64}$$

$$\log_3 3^{-2} = -2$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$$

$$(5)^3 = 125$$

مثال:



$$\log_2 4 =$$

$$\log_3 \sqrt{27} =$$

مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید.



$$\log_{10} 10 =$$

$$\log_3 1 =$$

$$\log_2 243 =$$

$$\log_6 \frac{1}{6} =$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 8 =$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} =$$

**تست ۳:** نمودار تابع  $y = \log_a(x - 2) - \frac{17}{4}$  از نقطه  $(\frac{17}{4}, -2)$  عبور می‌کند. مقدار  $a$  کدام است؟

 $\frac{3}{4}$  (۴)

۳ (۳)

 $\frac{2}{3}$  (۲) $\frac{3}{2}$  (۱) $x > 2$  (۴) $x \in \mathbb{R}$  (۳) $x > -1$  (۲) $x > 0$  (۱)

**تست ۴:** حاصل  $[\log_{\frac{1}{5}} 60]$  چقدر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۵ (۴)

-۵ (۳)

-۶ (۲)

۶ (۱)



**تست ۵:** اگر  $f(x) = a - 2 \log_2 \left(\frac{x}{2} - 5\right)$  باشد،  $f(10 + 2\sqrt{2}) = 42$  و  $f(x) = 42$  چقدر است؟

 $\frac{9}{2}$  (۴) $\frac{7}{2}$  (۳) $\frac{5}{2}$  (۲) $\frac{3}{2}$  (۱)

**تست ۶:** تعداد رادیکال‌ها در معادله  $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}} = -8$  چقدر است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)



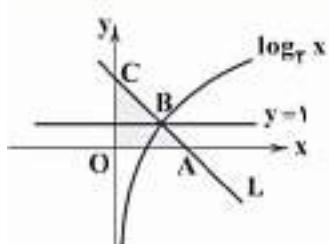
**تست ۷:** اگر مثلث زنگی، متساوی الساقین باشد، مساحت آن چقدر است؟

۴/۵ (۱)

۳/۵ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)



نکته: واضح است که داریم:



$$f(x) = a^x \Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = (0, +\infty) \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \longrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x \Rightarrow \begin{cases} D_f = (0, +\infty) \\ R_f = \mathbb{R} \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

مثال: دامنهٔ تابع  $y = \log_a (4 - x^2)$  را بباید.

$$\begin{aligned} f(x) = \log_a (4 - x^2) &\Rightarrow 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2 \\ &\Rightarrow D_f = (-2, 2) \end{aligned}$$

محل ۳: دامنهٔ توابع  $h(x) = \sqrt{1 - \log(1 - x)}$ ,  $g(x) = \log_x(1 - x)$ ,  $f(x) = \log \sqrt{x^2 - 3x}$  را بباید.



تست: دامنهٔ تابع  $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$  به کدام صورت بازه‌ها است؟

(۱)  $[0, 5] \quad (2) [-2, 2] \quad (3) [-2, 0] \cup (3, 5) \quad (4) (3, 5) \cup (-2, 0)$



تست ۱۰: دامنهٔ تابع  $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} x^2}$  کدام است؟

(۱)  $[3, 4] \quad (2) (3, 4) \quad (3) [3, +\infty) \quad (4) (3, +\infty)$



تست ۱۱: برد کدامیک از توابع زیر برابر  $\mathbb{R}$  است؟

(۱)  $k(x) = \sin x \quad (2) h(x) = \log_{0.1} x \quad (3) g(x) = 2^{-x} \quad (4) f(x) = x^2$



$$k(x) = \sin x$$

$$h(x) = \log_{0.1} x$$

$$g(x) = 2^{-x}$$

$$f(x) = x^2$$

(( اهم‌العلی )): بدترین هردم کسی است که خود را بهتر از دیگران بداند.



### قوانين لگاریتم:

- ۱)  $\log_a x^n = n \log_a x$
- ۲)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- ۳)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- ۴)  $\log_a m x = \frac{1}{m} \log_a x$
- ۵)  $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$
- ۶)  $a^{\log_a x} = x$
- ۷)  $\log_a a = 1$
- ۸)  $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
- ۹)  $\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$
- ۱۰)  $\log \frac{1}{x} = -\log x$

$$\text{EX}) \quad \log_{\sqrt{a}} v^2 = \log_{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}} v^2 = \frac{2}{1} \log_a v = 2 \times 1 = 2$$

$$\log \sqrt[3]{v^4} = \frac{1}{3} \log v^4 = \frac{1}{3} \log v^{-3} = \frac{-3}{3} \log v = -1$$

$$\frac{1}{\log_v \sqrt[3]{v^4}} = \log_{\sqrt[3]{v^4}} v = \log_{v^{\frac{1}{3}}} v^1 = \frac{1}{3} \log_v v = \frac{1}{3}$$

نکته: داریم:

$$\log a = \log \frac{10}{v} = \log 10 - \log v = 1 - \log v \Rightarrow \begin{cases} \log v = 1 - \log a \\ \log a = 1 - \log v \end{cases}$$

**مثال ۴:** اگر  $\log 3 = 0.48$  و  $\log 2 = 0.30$  باشد، حاصل را بیابید.



$$\log \frac{\sqrt{15}}{9} = \quad , \log \sqrt{6} =$$

$$\log_5 \frac{\sqrt{18}}{4} = \quad , \log \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{8}} =$$

$$\log \frac{\sqrt[3]{25}}{5} = \quad , \log \sqrt[3]{2700} =$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱- $k$  (۴)

۱-۲k (۳)

۲-۵k (۲)

۱-۴k (۱)

سته



اگر  $\log 5 = 3k$ ، آنگاه  $\sqrt[3]{1/6}$  کدام است؟

(خارج تجربی ۹۰)

۱-۴a -  $\frac{3b}{2}$  (۴)

۱-۲b -  $\frac{4a}{3}$  (۳)

۱-۴b -  $\frac{3a}{2}$  (۲)

۱-۳b -  $\frac{4a}{3}$  (۱)

سته



$\log \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{2}}$  برحسب  $a$  و  $b$  کدام است؟

سته

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سته



اگر  $x = \sqrt{85}$  باشد، مقدار  $A = \left[ \log_7^{\left[ x \right]} \right]$  کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

سته

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{8}$  (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{12}$  (۱)

سته



اگر  $x > 1$  باشد، حاصل  $\log_{\lambda}^{\sqrt{x-1}}$  کدام است؟ ( $x > 1$ )

سته

$-1 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < 0$  (۲)

$2 < \log_2 2 < 3$  (۱)

سته

$-3 < \log_{\frac{1}{5}} 3 < -2$  (۴)

$2 < \log_{\sqrt{2}} 2 / 5 < 3$  (۳)



$b-a+1$  (۴)

$2a-b-1$  (۳)

$a+b+1$  (۲)

$2a-b+2$  (۱)

سته



اگر  $a = \log 20$  و  $b = \log 30$ ، مقدار  $\log 15$  برحسب  $a$  و  $b$  کدام است؟

سته

((اهم علی)) : صبر، کلید رسیدن است و کاهیابی سرانجام کسی است که شکیابی هیورزد.

**تست ۱۸:** عدد  $\frac{1}{\sqrt[5]{5}}$  در کدام بازه قرار دارد؟

(−۲, −۱) (۴)

(-1, 0) (۳)

(1, 2) (۲)

(0, 1) (۱)



**تست ۱۹:** حاصل عبارت  $\sqrt{2^{3+\log_2 6}}$  کدام است؟

 $4\sqrt{3}$  (۴)

۶ (۳)

 $3\sqrt{3}$  (۲) $2\sqrt{3}$  (۱)

**تست ۲۰:** اگر  $\log_3 x = a$  باشد، آن‌گاه حاصل  $\log_{\sqrt{3}} x$  کدام است؟

 $\frac{1-a}{1+a}$  (۴) $\frac{1-a}{2-a}$  (۳) $\frac{a}{1-a}$  (۲) $\frac{a}{2-a}$  (۱)

**تست ۲۱:** اگر ریشه‌های معادله  $x^7 - 5x^2 - 2 = 0$  برابر  $x + \log_7 B$  و  $x + \log_7 A$  باشد، آن‌گاه مجموع ریشه‌های معادله

 $x^7 - (\log_{\sqrt{7}} (AB+12))x = 1$  کدام است؟

−۸ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۵ (۱)



**تست ۲۲:** اگر مجموع ریشه‌های معادله  $x^7x - 12x^3 + 26 = 0$  برابر  $\log_7 A$  باشد، مقدار  $A$  کدام است؟

۲۶ (۴)

۲۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



**تست ۲۳:** حاصل عبارت  $A = f + \log_{\sqrt{f}} \sqrt{1-f} + \log_{\sqrt{1-f}} \sqrt{f}$  کدام است؟

۴ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۱ (۱)



تست ۲۴ - اگر  $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} = a$  و  $\log_a b = c$  برحسب a و b کدام است؟

$$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{b}} \quad (\text{F})$$

$$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{b}} \quad (\text{T})$$

$$\frac{a+1}{\sqrt{b}} \quad (\text{T})$$

$$\frac{a+1}{\sqrt{b}} \quad (\text{F})$$



تست ۲۵ - مقدار عددی  $A = (\sqrt[3]{\log_5 4})^{\log_7 5}$  کدام است؟

$$\sqrt[3]{4} \quad (\text{F})$$

$$\sqrt[3]{4} \quad (\text{T})$$

$$\sqrt[3]{5} \quad (\text{T})$$

$$\sqrt[3]{4} \quad (\text{F})$$



تست ۲۶ - اگر a و b اعدادی مثبت و مخالف یک باشند، ساده شده عبارت  $A = \frac{\log_a m \times \log_b m}{\log_a m + \log_b m}$  کدام است؟

$$\log_m(a+b) \quad (\text{F})$$

$$\log_{(a+b)} m \quad (\text{T})$$

$$\log_m ab \quad (\text{T})$$

$$\log_{ab} m \quad (\text{F})$$



تست ۲۷ - اگر  $\log_{\sqrt{A}} 4 = a$  برحسب a کدام است؟

$$\frac{\sqrt{1+a}}{2} \quad (\text{F})$$

$$\frac{\sqrt{1-a}}{2} \quad (\text{T})$$

$$\frac{\sqrt{a}+1}{2} \quad (\text{T})$$

$$\frac{1-\sqrt{a}}{2} \quad (\text{F})$$



نکته: داریم:



$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

$$\Rightarrow \log_{a_1} a_1 \times \log_{a_2} a_2 \times \log_{a_3} a_3 \times \dots \times \log_{a_n} a_{n-1} = \log_{a_n} a_1$$

تست ۲۸ - اگر  $A = \frac{1}{B}$ ، حاصل  $B = (\log_{15} 16)(\log_{14} 15) \dots (\log_2 3)$  و  $A = \log_5 \frac{4}{5} + \log_6 \frac{5}{6} + \log_7 \frac{6}{7} + \dots + \log_{400} \frac{399}{400}$  کدام است؟

$$\frac{-1}{4} \quad (\text{F})$$

$$\frac{-1}{4} \quad (\text{T})$$

$$-1 \quad (\text{T})$$

$$\frac{-1}{2} \quad (\text{F})$$



معادلات لگاریتمی:

چون تابع لگاریتم یک تابع یک به یک است، پس داریم:

$$\text{EX) } \log(x-1) + \log(x+1) = \log 4$$

$$\Rightarrow \log((x-1)(x+1)) = \log 4 \Rightarrow x^2 - 1 = 4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ok} \\ x = -3 \times \end{cases}$$

**مثال ۱:** معادلات زیر را حل کنید.



$$\log_2 x = 3$$

$$\log_7(2x+1) = 2$$

$$\log_5(x+1) + \log_5(x+4) = 2$$

$$\log_7(2x+1) = 2x+1$$

$$\log_7(x-1) = 4$$

$$\log(2x) - \log(x-2) = 1$$

$$2\log_7(x-1) = 2$$

$$2\log_7 x = -\log_7 27$$

$$\log(x+1) - \log(x-2) = 2$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تست ۳۹: از معادله لگاریتمی  $1 = \log_2(2x^2 + 1) - \log_2(x + 2)$ ، مقدار لگاریتم  $(1 - 2x)$  در پایه ۸، کدام است؟

 $\frac{2}{3}$  (۴) $\frac{1}{2}$  (۳) $-\frac{1}{2}$  (۲) $-\frac{2}{3}$  (۱)

تجربی (۹۵)  
کل

تست ۳۰: از دو معادله ۱  $= \log(y - x) + \log(4x + y) = ۲$  و  $\log(y + ۲) = ۲$ ، مقدار  $x$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

خارج (۸۷)  
کل

تست ۳۱: از معادله لگاریتمی  $\sqrt[۳]{x+۱} = \log(2x - ۵) - \log(x - ۳)$  در پایه ۴، کدام است؟

۱ (۴)

 $\frac{2}{3}$  (۳) $-\frac{1}{2}$  (۲) $\frac{1}{3}$  (۱)

خارج تجربی (۹۵)  
کل

تست ۳۲: از تساوی  $6 = \log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6)$ ، مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۴، کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$  (۳) $\frac{2}{3}$  (۲) $\frac{1}{2}$  (۱)

خارج تجربی (۹۳)  
کل

تست ۳۳: از تساوی  $5 = \log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$  در پایه ۲، کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$  (۳) $\frac{1}{2}$  (۲)

-۱ (۱)

تجربی (۹۳)  
کل

((ا) احمد علی((ع)): هر کس به خدا توکل کند، دشواری‌ها برای او آسان می‌شود و اسباب برایش فراهم می‌گردد. ((ب))

تست ۳۴: - مجموع ریشه‌های معادله  $\log_2 x + 3 \log_x 2 = \log_3 81$  کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)



تست ۳۵: - مجموع ریشه‌های معادله  $(2^x - 3^{\log_2 5})(4^x - 5^{\log_3 4}) = 0$  کدام است؟

 $\log_2 3\sqrt{2}$  (۴) $\log_2 5\sqrt{2}$  (۳) $\log_2 5\sqrt{3}$  (۲) $\log_2 10$  (۱)

تست ۳۶: - نمودار توابع  $f(x) = \log_3(x+1)$  و  $g(x) = x-1$  در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۴) صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



تست ۳۷: - ریشهٔ معادله  $\log_{0.5}(2-x) = -1$  کدام است؟

۱/۹۸ (۴)

۱/۹۶ (۳)

۱/۹۴ (۲)

۱/۹۲ (۱)



تست ۳۸: - اگر  $\log_{(x^7+x-y)}(x^7+x+y) = 2$  باشد، حاصل  $\log_7(x+1) + \log_7 x$  چقدر است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)



تست ۳۹: - اگر  $\log_7(x+5) + \log_7(x-1) - \log_7(x+2) = 3$  باشد، آنگاه کدام گزینه از همه بزرگ‌تر است؟

 $(\frac{1}{x})^{\frac{5}{2}}$  (۴) $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$  (۳) $\frac{1}{x^7}$  (۲) $x^{-7}$  (۱)

تست ۴۰: - حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $(\log x)^2 + \log x^2 = 7$  کدام است؟

۰/۰۱ (۴)

۰/۱ (۳)

۱۰ (۲)

۱۰ (۱)

تست ۴۱: - اگر  $\sqrt[5]{\log_5 x} - \log_9 \sqrt[3]{x} = 1$  کدام است؟

۲۶ (۴)

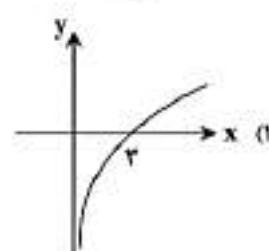
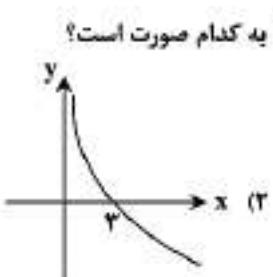
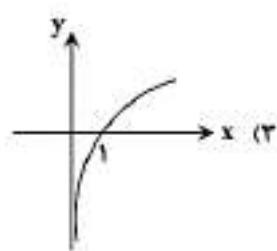
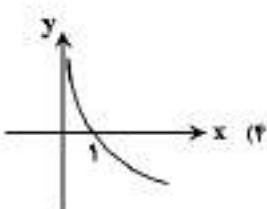
 $\frac{5}{3}$  (۳) $\frac{8}{3}$  (۲) $\frac{25}{3}$  (۱)

**رسم توابع لگاریتمی:**  
 برای رسم توابع لگاریتمی، ابتدا باید حداقل سه نقطه از تابع را مشخص کنیم. این سه نقطه را می‌توانیم برای تابع  $f(x) = \log_a x$  به صورت زیر تعیین کنیم:

x	$\frac{1}{a}$	1	a
$f(x) = \log_a x$	-1	*	1



توابع

تست ۴۲: - نمودار تابع  $y = 2 \log_2 \left(\frac{1}{x}\right)$  و  $y = -\log_3 x$ ،  $y = 1 + \log_2 x$  را رسم کنید.

تست ۴۲:



نکته:



برای رسم توابع لگاریتمی با ضابطه  $f(x) = \log_a(x - b)$  می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم:

$x$	$\frac{1}{a} + b$	$1 + b$	$a + b$
$f(x) = \log_a(x - b)$	-1	*	1

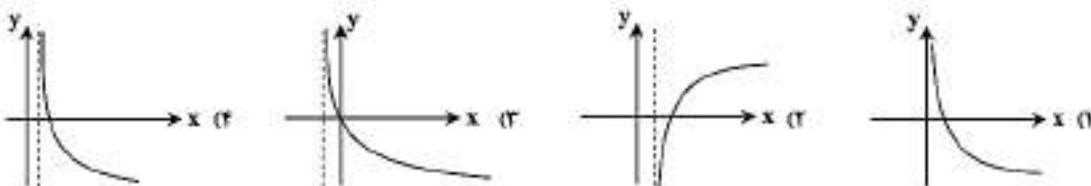
و یا ابتدا تابع  $f(x) = \log_a x$  را رسم کرده و سپس نمودار تابع را به اندازه  $b$  واحد به سمت چپ یا راست منتقل کنیم.

توبع:  
۷۵

نمودار تابع  $y = 1 + \log_3\left(\frac{1}{x-2}\right)$  و  $y = \log_3(x+1)$ ,  $y = \log_2(x-2)$  را رسم کنید.



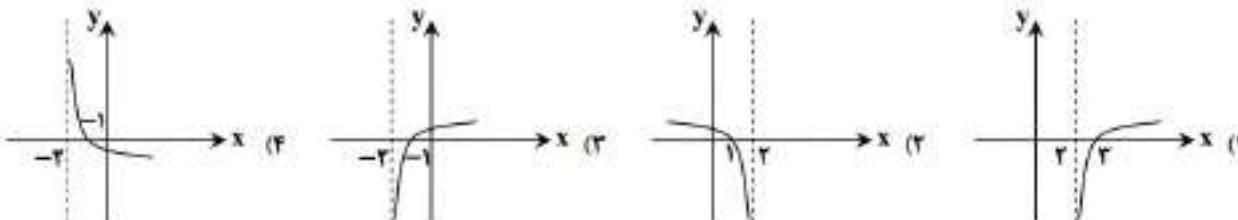
تست ۴۳: نمودار تابع  $f(x) = -\log_2(x-1)$  به کدام شکل است؟



تست ۴۴: نمودار تابع  $f(x) = a + \log_2(x+b)$  به صورت زیر است. کدام است؟



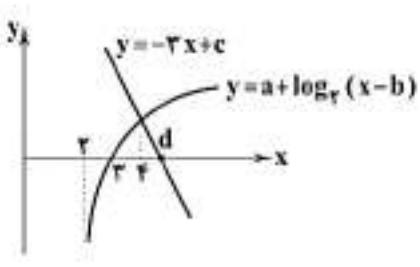
تست ۴۵: نمودار تابع  $y = -\log_2(x+2)$  کدام است؟



دانلود از سایت ریاضی سرا

((اهم اعلیٰ علی)): آن که در گناهان، بسیار اندیشه کند، (این کار) او را به گناه همیکشاند. (۱۰)

با توجه به شکل زیر، مقدار  $d$  چندراست؟



$\frac{13}{2}$  (۱)

$\frac{12}{2}$  (۲)

$\frac{15}{2}$  (۳)

$\frac{16}{2}$  (۴)



### کاربردی از توابع لگاریتمی:



برای محاسبه قدرت یک زمین لرزه بر حسب ریشر از رابطه  $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{11/8}}$  استفاده می‌کنیم که در آن

$E$  نشان دهنده میزان انرژی حاصل از زمین لرزه بر حسب واحد ارگ است.

نکته: داریم:

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{11/8}} \Rightarrow \frac{3}{2} M = \log \frac{E}{10^{11/8}} \Rightarrow \frac{3}{2} M = \log E - \log 10^{11/8}$$

$$\Rightarrow \log E = 11/8 + 1/5 M$$

یادآوری: توابعی به صورت  $f(x) = ka^x$ , ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) مانند یک تابع نهایی رفتار می‌کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و ... ظاهر می‌شود.

مثال ۸: اگر قدرت یک زلزله ۶ ریشر باشد، میزان انرژی آزاد شده از آن را بیابید.



مثال ۹: انرژی آزاد شده توسط یک زلزله ۷ ریشری، چند برابر یک زلزله ۵ ریشری است.



مثال ۱۰: انرژی آزاد شده توسط یک زلزله ۴ ریشری ۱۰ برابر پس لرزه آن بوده است. قدرت پس لرزه را بیابید.



**تست ۴۷:** - اگر بزرگی زلزله‌ای برابر  $M$  در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن برابر  $E$  در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه  $\log E = 11/8 + 1/5M$  به دست می‌آید. اگر یک زلزله ۸ ریشتری رخ دهد، مقدار انرژی آزادشده در آن چند ارگ است؟

(۱)  $10^{22}/8$

(۲)  $10^{25}/8$

(۳)  $10^{24}/8$

(۴)  $10^{23}/8$



**تست ۴۸:** انرژی آزاد شده (به واحد Erg) از زلزله‌ای به بزرگی  $M$  ریشتر از رابطه  $\log E = 12 + 1/5M$  به دست می‌آید. اگر انرژی آزاد شده  $Erg = 10^{24} \times 10^{18}$  باشد، بزرگی این زلزله چند ریشتر بوده است؟ ( $\log 2 = 0.3010$ )

(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) ۴

(۴) ۳



**تست ۴۹:** اختلاف شدت دو زلزله در مقیاس ریشتر برابر  $1/4$  است. انرژی زلزله قوی‌تر چند برابر دیگری است؟ ( $\log 5 = 0.6990$ )

(۱) ۵

(۲) ۲۵

(۳) ۱۲۵

(۴) ۶۲۵



**تست ۵۰:** یک زلزله‌ای  $5$  ریشتری،  $10^k$  ارگ انرژی آزاد می‌کند.  $k$  چقدر است؟

(۱)  $19/3$

(۲)  $20$

(۳)  $19/7$

(۴)  $19/3$



**تست ۵۱:** - نوعی باکتری به صورت نمایی تکثیر می‌شود. این باکتری در هدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اگر این باکتری با تعداد  $200$  عدد شروع به تکثیر کند، پس از چند ساعت تعداد باکتری‌ها به  $1200$  عدد می‌رسد؟

(۱)  $\frac{1}{2}(1 + \log_2 2)$

(۲)  $2(1 + \log_2 2)$

(۳)  $\frac{1}{2}(1 + \log_2 2)$

(۴)  $2(1 + \log_2 2)$



**تست ۵۲:** - اگر بزرگی زلزله‌ای برابر  $M$  در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن زلزله (E) در واحد ارگ از رابطه  $\log E = 11/8 + 1/5M$  به دست می‌آید. در منطقه‌ای دو زلزله می‌آید. انرژی آزادشده در زلزله دوم،  $10$  برابر انرژی آزادشده در زلزله اول است. بزرگی زلزله دوم چند ریشتر بیشتر از بزرگی زلزله اول است؟

(۱) ۱/۵

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

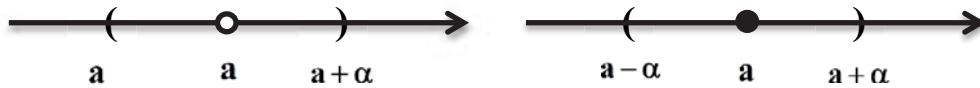
(۴) ۱/۱





## همسایگی یک نقطه و حد تابع:

هر بازه به صورت  $(a-\alpha, a+\alpha)$  را که در آن  $a$  یک عدد حقیقی و  $\alpha$  یک حقیقی مثبت است را یک همسایگی متقارن برای  $x=a$  مینامیم. همچنین بازه  $(a-\alpha, a+\alpha) - \{a\}$  یک همسایگی متقارن محدود برای  $x=a$  نامیده می‌شود.



نکته: به بازه‌ی نظیر  $(a, a+\alpha)$  یک همسایگی راست و به بازه‌ی نظیر  $(a-\alpha, a)$  یک همسایگی چپ نقطه  $a$  می‌گوییم.

تعریف: اگر تابع  $f$  با نزدیک شدن  $x$  به نقطه  $a$  از سمت مقدارهای کمتر از آن و نزدیک به آن، به عددی مانند  $l$  نزدیک شود، می‌گوییم حد چپ تابع در نقطه  $a = l$  برابر  $|$  می‌باشد. و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

تعریف: اگر تابع  $f$  با نزدیک شدن  $x$  به نقطه  $a$  از سمت مقدارهای بیشتر از آن و نزدیک به آن، به عددی مانند  $l$  نزدیک شود، می‌گوییم حد راست تابع در نقطه  $a = l$  برابر  $|$  می‌باشد. و می‌نویسیم:

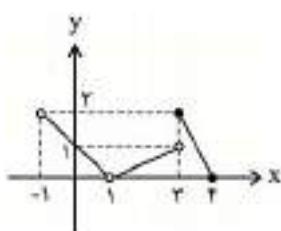
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

تعریف: تابع  $f$  در نقطه  $a$  حد دارد هرگاه حد راست و چپ تابع در نقطه مذکور موجود و برابر یکدیگر باشد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

مثال: حد تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^3 + 2 & x < 1 \end{cases}$  در نقطه  $x=1$  را بباید.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x+1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + 2) = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$



با توجه به شکل زیر کدام گزینه صحیح است؟

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0 \quad (1)$$

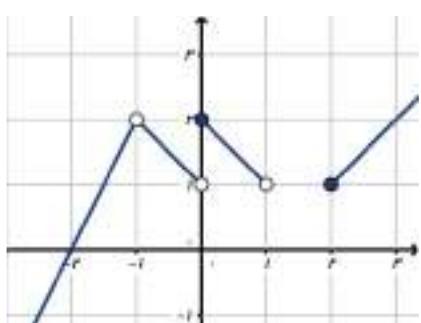
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad (4)$$

وجود ندارد.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$



(( تمام انسانهای موفق به یک نتیجه رسیده‌اند که باید قدر ارزش‌های خود را بدانند. ))

**مثال ۱:** با توجه به نمودار، موارد خواسته شده را بیابید.



$$f(-1) = \quad, f(\cdot) = \quad, f(1) = \quad, f(r) = \quad$$

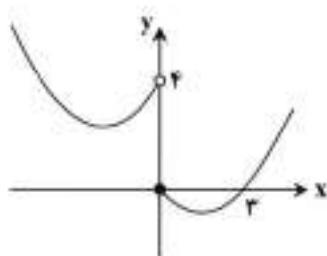
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \quad, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \quad, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \quad$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^+} f(x) = \quad, \lim_{x \rightarrow \cdot^-} f(x) = \quad, \lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) = \quad$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \quad, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \quad, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \quad$$

$$\lim_{x \rightarrow r^-} f(x) = \quad, \lim_{x \rightarrow r^+} f(x) = \quad, \lim_{x \rightarrow r} f(x) = \quad$$

**مسئلہ ۲:** - شکل مقابل، نمودار تابع  $y = f(x)$  است. کدام گزینہ نادرست است؟



$$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = + \quad (\text{۱})$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^+} f(x) = + \quad (\text{۲})$$

$$\lim_{x \rightarrow -r} f(x) = f(\cdot) \quad (\text{۳})$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^-} f(x) = \mp \quad (\text{۴})$$

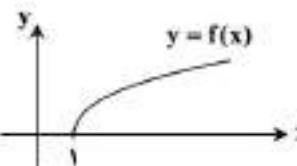
**مسئلہ ۳:** - شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x-1}$  است. کدام یک از موارد زیر درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = + \quad (\text{۱})$$

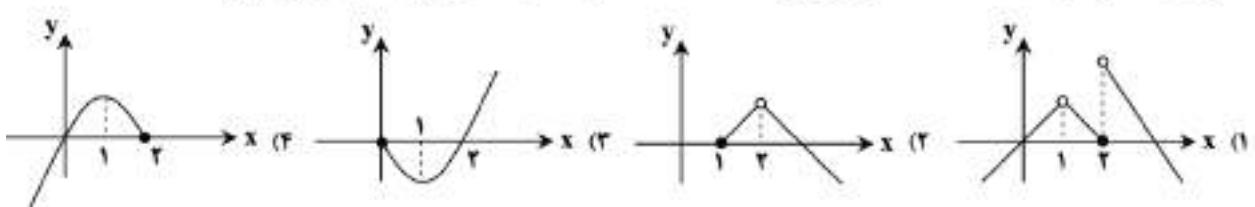
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad (\text{۲})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad (\text{۳})$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^+} f(x) = 1 \quad (\text{۴})$$



**مسئلہ ۴:** - تابع  $y = f(x)$  در نقطه  $x = 1$  حد ندارد؛ ولی در نقطه  $x = 2$  حد دارد. کدام شکل می‌تواند نمودار این تابع باشد؟



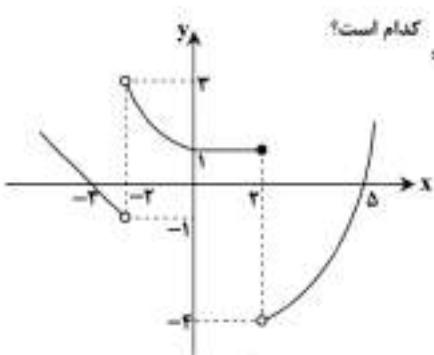
**مسئلہ ۵:** - نمودار تابع  $(y = f(x))$  به صورت رویه‌رو است. مقدار  $\lim_{x \rightarrow (-r)^+} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow r^-} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow r^+} [f(x)]$  کدام است؟

$$(\text{۱}) \quad \lim_{x \rightarrow (-r)^+} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow r^-} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow r^+} [f(x)] \quad (\text{۲})$$

$$-r \quad (\text{۳})$$

$$-r \quad (\text{۴})$$

$$-r \quad (\text{۵})$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۶:** - اگر در تابع  $f$  داشته باشیم  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$  ، کدام یک از موارد زیر درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \quad (2)$$

$$f(2) = 3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \quad (3)$$

**تست ۷:** در تابع با ضابطه  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$  اگر  $f(x) = (x+a)[x]$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \quad (2)$$

(۴) صفر

۲ (۲)

۱ (۱)

(تجربی ۸۷)



**تست ۸:** اگر تابع  $y = a[x+2] + x[x]$  در  $x=2$  حد داشته باشد، حد این تابع در  $x=\sqrt{2}$  چقدر است؟

$$2\sqrt{2} + 8 \quad (4)$$

$$\sqrt{2} - 8 \quad (1)$$

$$2\sqrt{2} - 8 \quad (2)$$

$$\sqrt{2} + 8 \quad (3)$$



**تست ۹:** - اگر  $f(x)$  یک تابع خطی باشد،  $\lim_{x \rightarrow 5} (2f(x) + 4) = 4$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$  حاصل (۱) کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۱۱ (۱)

(۱)



**تست ۱۰:** - اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = a$  و  $f(x) = \frac{x^r - a}{x + 2}$  ، مقدار  $a$  کدام است؟

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$



**تست ۱۱:** - اگر  $f(x) = \begin{cases} ax^r + bx & x < -2 \\ b+1 & x = -2 \\ cx & x > -2 \end{cases}$  در  $x=-2$  حد داشته باشد،  $a$  و  $b$  کدام است؟

$$\begin{cases} a = \frac{r}{r} \\ b = -4 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} a = \frac{r}{r} \\ b = -4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a = \frac{r}{r} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} a = \frac{r}{r} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$





نکته: اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} g(x) & , x \neq a \\ h(x) & , x = a \end{cases}$  تعریف شود، در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

نکته: اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} g(x) & , x > a \\ h(x) & , x < a \end{cases}$  تعریف شود، در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x)$$

۹ (۴)

۳ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

**مسئلہ ۱۲:**

$$\text{اگر } \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \neq 4 \\ 5 & x = 4 \end{cases} \text{ حاصل کدام است؟}$$



-۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

**مسئلہ ۱۳:**

(ریاضی ۸۶)

$$\text{اگر } f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases} \text{ مقدار } a \text{ کدام است؟}$$

۳ (۳)



**مسئلہ ۱۴:** در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & ; x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & ; x < 0 \end{cases}$  کدام است؟

(ریاضی ۸۹)

۴) موجود نیست.

۳) صفر

۱) ۲

-۱) ۱



**مسئلہ ۱۵:** اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} (|x| - a)^r - r & x < 0 \\ x + ra & x > 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  حد داشته باشد، مجموعه مقادیر  $a$  کدام است؟

Ø (۴)

{1, -r} (۳)

{-1, r} (۲)

{-1} (۱)



((اهم علی)) بدنین هردم کسی است که خود را بهتر از دیگران بداند.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{a} + \frac{3}{x} \right) \text{ حد داشته باشد، آنگاه } f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \leq 2 \\ a+x & x > 2 \end{cases}$$

-۴ (۴)

۳ (۴)

-۲ (۲)

۲ (۱)



$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x > 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases} \text{ و } g(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

 $\frac{f}{g}$  (۴)

fg (۳)

f-g (۲)

f+g (۱)



مثال ۲: مقدار  $a$  را چنان بیابید که تابع در نقطه مورد نظر حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 4ax + 2 & x \geq 1 \\ x - 4a & x < 1 \end{cases}, \quad x=1$$

$$, f(x) = \begin{cases} a[x] - 1 & x \leq 2 \\ a\sin(x-2) + bx & x > 2 \end{cases}, \quad x=2$$



نکته: تابع  $f(x) = \sqrt{x-a}$  در  $x=a$  دارای حد نمی‌باشد. زیرا در این نقطه حد چپ ندارد.



$$\text{مثال ۱۸:} - \text{تابع } f(x) = \sqrt{x-3+2b} \text{ در } x=a \text{ حد ندارد، ولی } f(a) = 2-b. \text{ مقدار } 2a+3b \text{ کدام است؟}$$

۴ (۴)

۶ (۳)

-۲ (۲)

۰ (۰) صفر



تابع  $f(x) = x^2 - 2x$  با دامنه  $D_f = [0, +\infty)$  مفروض است. این تابع در کدام نقطه از دامنه خود حد ندارد؟

۲ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۰) صفر



مثال ۲۰: - کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟ ( ) نماد جزء صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{5-x} = + \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} ([x]+1) = 3 \quad (۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} = 1 \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x-6} = + \quad (۱)$$



قضایای حد توابع:

اگر توابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $x = a$  حد داشته باشند آنگاه تابع:  $f \times g$  و  $f \pm g$  در نقطه  $x = a$  دارای حد میباشد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  داریم،  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ : اگر

نکته: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L} (L \neq 0), \quad \lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = L^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad (L > 0 \vee n = 2k+1)$$

نکته: اگر  $f$  یک تابع چندجمله‌ای باشد داریم:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

-۳ (۴)

۲ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

سته: ۱۱

سته: ۱۲

اگر تابع  $f$  در نقطه‌ی  $x = 1$  حد داشته باشد و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)-1}{f(x)+1} = 1$  آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

اگر  $f(x)$  در  $x = 2$  حد داشته باشد و داشته باشیم  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+f(x)+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+x} = 2$  کدام است؟

$-\frac{5}{2}$  (۴)

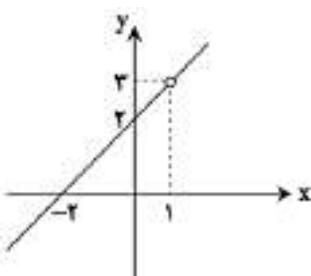
$\frac{5}{2}$  (۳)

$\frac{5}{2}$  (۲)

$-\frac{5}{2}$  (۱)

دانلود از سایت ریاضی سرا

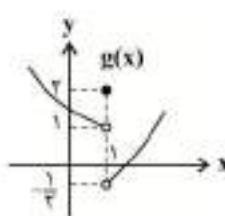
((اهم علی)) شایسته است که دانش هر داشت خوب بیشتر، و خردش غالب بر زبانش باشد. ()))



$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+5)f(x)}{x^2 - 4}$$

کدام است؟

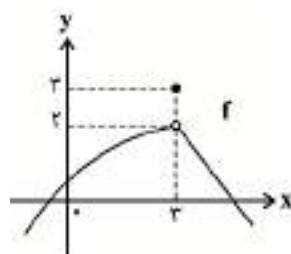
- تست ۲۴:**
- (۱)  $\frac{6}{5}$  ک
- (۲)  $\frac{5}{2}$  ک
- (۳)  $-\frac{3}{4}$  ک
- (۴) صفر ک



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(f^r - 2g)(x)}}{(f * g)(x) + 3}$$

کدام است؟

- تست ۲۵:**
- (۱)  $+\infty$  ک
- (۲)  $-1/2$  ک
- (۳)  $-1/2$  ک
- (۴)  $1/2$  ک



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - \lambda}{|f(x) - 2|}$$

کدام است؟

- تست ۲۶:**
- (۱)  $12$  ک
- (۲)  $-12$  ک
- (۳)  $4$  ک
- (۴)  $-4$  ک

**تست ۲۷:** اگر  $f(x) = 2x - \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = x+1+\sqrt{x+1}$  باشد، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 2} (f \times g)(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} (f+g)(x)$  به ترتیب کدام است؟

(۱) ندارد، ندارد

(۲)  $16, -2$  ک

(۳) ندارد، دارد

(۴)  $24, -2$  ک

**تست ۲۸:** توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  در نقطه  $x = 1$  حد دارند. اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} ((3x-1)g(x)) = 7$  ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lambda$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) + 3g(x)) = 7$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{3}$  ک(۲)  $2$  ک(۳)  $-2$  ک

**نکته:**

تابع جزء صحیح  $f(x) = [x]$  در اعداد صحیح حد ندارد. زیرا برای این توابع حد های چپ و راست در این نقاط با یکدیگر برابر نیستند.



$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left( \lim_{x \rightarrow a^+} [x] = a , \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = a - 1 \right)$$

**نکته:**

تابع  $f(x) = (x-a)[x]$  در عدد صحیح  $x = a$  حد دارد. زیرا در این نقطه داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)[x] &= + \times a = + , \quad \lim_{x \rightarrow a^-} (x-a)[x] = + \times (a-1) = + \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (x-a)[x] &= + \end{aligned}$$

**تست ۲۹:** اگر  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 4$  و  $f(x) = [x] + 3m$  نماد جزء صحیح است.

$$\frac{1}{3} (4)$$

$$3 (3)$$

$$\frac{1}{2} (2)$$

$$\frac{3}{2} (1)$$



**تست ۳۰:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{[x] - \sin^2 x}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} + x)}$  کدام است؟ ( ) علامت جزء صحیح است.



$$-1 (4)$$

$$0 (3)$$

$$2 (2)$$

$$1 (1)$$

**تست ۳۱:** تابع  $f(x) = (x^2 - 5x + 6)[x]$  در چند عدد صحیح از بازه  $(-4, 4)$  ناییوسته است؟



**تست ۳۱:** - تابع  $f(x) = [x]$  را در نظر بگیرید. کدامیک از توابع زیر در  $x = 5$  حد دارد؟ ( ) نماد جزء صحیح است.

$$y = f(x-1) (4)$$

$$y = f(x) - 5 (3)$$

$$y = (x-5)f(x) (2)$$

$$y = xf(x) (1)$$



**تست ۳۲:** کدامیک از گزینه های زیر نادرست است؟ ( ) نماد جزء صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 2 (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/\Delta} [x] = 1 (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \Delta} \sqrt{2x-6} = 2 (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (-2) = -2 (1)$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۳۳:** - تابع  $f(x) = \begin{cases} x & \text{در نقطه } x = \sqrt{a} \\ a & \text{کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟} \end{cases}$  ( ) نماد جزء صحیح است.

۱۳ (۴)

۹ (۳)

۱۵ (۲)

۱۱ (۱)



**تست ۳۴:** حد عبارت  $\lim_{x \rightarrow \pi} [\cos \frac{x}{3} - \cos x \sin 2x]$  وقتی  $x \rightarrow \pi$ , کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است).

۴) حد ندارد.

۱ (۳)

۲ (۲) صفر

-۱ (۱)

(ریاضی خارج)



**تست ۳۵:** حد عبارت  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} [\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos 3x + [\tan^2 x]$  به مفهوم جزء صحیح است.

۴) حد ندارد.

۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(ریاضی ۹۵)



## نکته:



الف) به عدد  $\pm$  صفر مطلق و به نمادهای  $\pm$ ,  $\infty$ ,  $-\infty$  صفرهای حدی می‌گوییم.

ب) در محاسبه حد، اگر حالت  $\frac{0}{0}$  اتفاق بیافتد (که عبارت معنی خاصی ندارد)، ابهام گفته می‌شود.

## محاسبه حد

برای محاسبه  $f(a)$ , بعد از محاسبه  $\lim_{x \rightarrow a}$  دو حالت به وجود می‌آید که عبارتند از:

الف) ابهام وجود ندارد: در این حالت برای محاسبه حد تابع کافیست  $f(a)$  را محاسبه کنیم.

**عمل ۴:** حد های زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \sin \sqrt{x+1} =$$

$$, \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 3x + 1) =$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x(\sin x + \cos x) =$$

$$, \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\sqrt{1-4x}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]-1}{[x^2]+ \sin \frac{\pi}{x}} =$$

$$, \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{36}{1+4x} \right] =$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۳۶:**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{4x^2 + bx + c}{x^2 - 2x - 3}$  کدام است؟

(۴) وجود ندارد.

-۸ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)



**ب) ابهام وجود دارد:** باید رفع ابهام انجام شود. یعنی عامل  $(x-a)$  از صورت و مخرج عبارت حذف شود. در این حالت صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم و بعد از ساده کردن عامل ابهام، حاصل حد را می‌یابیم.  
مثال: حاصل حد های زیر را بیابید.



$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+6)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)}{2x(2x+1)} = \frac{1+1+1}{-1} = -3$$

**تست ۳۷:** حاصل حد های زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} =$$

$$, \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x-2|} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} =$$

$$, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} =$$

$$, \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x]x^2 - 9}{2x - 6} =$$

**تست ۳۷:**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$  حاصل کدام است؟

(۴) صفر

۱/۲ (۳)

۳/۲ (۲)

۱ (۱)



**تست ۳۸:** - حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2 - x} + \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{[x]-1}$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزو صحیح است).

(۴) صفر

۱/۲ (۳)

۲ (۲)

-۱/۲ (۱)



((اهم رضا(ع)): علم کنجههای کمال است و کلیدهای آن کنجههای، پرسش کردن است. ))

**تست ۳۹:** اگر تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  حدی مخالف صفر داشته باشد (۱)  $f$  کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2 - 2x + a}, & x > 1 \\ a+b, & x = 1 \\ \frac{b(x-1)}{|x-1|}, & x < 1 \end{cases}$$

۱)  $\frac{1}{2}$  ۲)  $\frac{1}{4}$  ۳)  $\frac{1}{3}$  ۴)  $\frac{1}{5}$

**تست ۴۰:** حاصل  $A = \lim_{x \rightarrow \pi} \left( \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \sin(\frac{\pi}{4} + x)} + \frac{|\cos x|}{\sin(x - \frac{\pi}{2})} \right)$  کدام است؟

۱)  $\frac{1}{2}$  ۲)  $\frac{1}{4}$  ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

**تست ۴۱:** حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sin(\frac{\pi}{4} + x)}{\sin^2(x + \pi)}$  کدام است؟

۱)  $\frac{1}{2}$  ۲)  $-\frac{1}{2}$  ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

**نکته:**

و وجود ندارد. زیرا:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x-a|}{x-a}$  پس  $f(x) = |x| = \begin{cases} u, & u > 0 \\ -u, & u \leq 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|x-a|}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x-a}{x-a} = +1$  ،  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|x-a|}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-(x-a)}{x-a} = -1$

**نکته: داریم:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)|x-a|}{x-a} = *$$


**تست ۴۲:** کدامیک از موارد زیر در مورد تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  درست است؟

۱)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$  ۲)  $\lim_{x \rightarrow -} f(x) = *$  وجود ندارد. ۳)  $\lim_{x \rightarrow +} f(x) = *$  وجود ندارد. ۴)  $\lim_{x \rightarrow -} f(x) = 1$

**تست ۴۳:** - تابع  $f(x) = \frac{(x+a)|x-4|}{x-4}$  در نقطه  $x=4$  حد دارد. مقدار  $a$  کدام است؟

۴) ۴      ۸) ۳      -۸) ۲      -۴) ۱



**نکته:** در برخی مسایل حدی از قوانین معمولی حد ها نظیر مخرج مشترک و ... تست را حل می کنیم.



**تست ۴۴:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right)$  کدام است؟

(تجربی ۸۵)  
۱)  $\frac{1}{16}$       ۲)  $\frac{1}{8}$       ۳)  $\frac{3}{16}$       ۴)  $\frac{3}{8}$



**تست ۴۵:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{3}{2x^2+5x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$  کدام است؟

(تجربی ۹۳)  
۱)  $\frac{7}{12}$       ۲)  $\frac{5}{12}$       ۳)  $-\frac{5}{12}$       ۴)  $-\frac{7}{12}$



**تست ۴۶:** حد عبارت  $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$  وقتی  $x \rightarrow 2^-$  کدام است؟ ( [ نماد جزء صحیح است).

(تجربی خارج ۹۲)  
۱)  $+\infty$       ۲)  $1$       ۳)  $-\frac{1}{2}$       ۴)  $-\infty$



پیوستگی توابع:

میگوییم تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  پیوسته است هرگاه:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

تعریف: تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  پیوستگی راست دارد، هرگاه حد  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

تعریف: تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  پیوستگی چپ دارد، هرگاه حد  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

نتیجه: تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته است، اگر در این نقطه پیوستگی چپ و راست داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

مثال: مقدار  $a$  و  $b$  را طوری بباید که تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  پیوسته باشد.

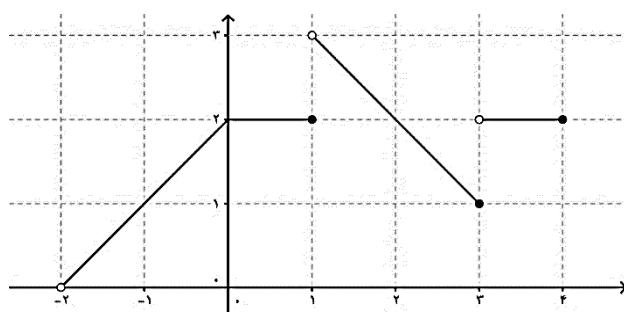
$$f(x) = \begin{cases} a[x] - 1 & x < 2 \\ -x & x = 2 \\ a\sin(x-2) + bx & x > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 1 = -2 \Rightarrow a = -1 \\ 2b = -2 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a[2] - 1 = a - 1$$

$$f(2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = a(0) + 2b = 2b$$



مثال: پیوستگی تابع را در نقاط  $-2, 0, 1, 3, 4$  بررسی کنید.



مسئلہ: اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 6x + 9} & , x \neq 3 \\ m & , x = 3 \end{cases}$  کدام است؟

-2 (۴)

2 (۳)

-1 (۲)

1 (۱)



دانلود از سایت ریاضی سرا

**مسئلہ ۲:** پیوستگی توابع زیر را در نقاط خواسته شده تعیین کنید.

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x > 3 \\ 10 & x = 3, x = 3 \\ x^2 + x - 2 & x \leq 3 \end{cases}$$

$$4) \quad f(x) = \sqrt{4-x}, x = 4, x = .$$

$$5) \quad f(x) = \sqrt[3]{x-5}, x = 5$$

$$6) \quad f(x) = [x], \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$7) \quad f(x) = [\sin x], x = ., x = \pi$$

**مسئلہ ۳:** مقدار  $a$  و  $b$  را طوری بباید کہ تابع  $f$  را در نقطه  $x = 2$  پیوسته باشد.  $f(x) = \begin{cases} x+a & x > 2 \\ bx & x \leq 2 \end{cases}$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



**مسئلہ ۴:** مقدار  $a$  و  $b$  را طوری بباید کہ تابع  $f$  را در نقطه  $x = 2$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] - 1 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ \sin(x-2) + bx & x > 2 \end{cases}$$

**مسئلہ ۵:** مقدار  $a$  و  $b$  را طوری بباید کہ تابع  $g(x) = \begin{cases} x^r + ax & x > 1 \\ x^r + rx & x = 1 \\ rb + \cos(x-1) & x < 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته باشد، مقدار  $a - b$  کدام است؟

-۱ (۱)

 $\frac{\Lambda}{\Gamma} (\Gamma)$  $-\frac{\Gamma}{\Lambda} (\Gamma)$  $-\frac{\Gamma}{\Lambda} (0)$ 

**تست ۴:** اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) & x > -2 \\ a & x = -2 \\ [x] + b & x < -2 \end{cases}$  در نقطه  $x = -2$  پیوسته باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟ (نماد جزء صحیح است).

۱ (۴)

۵ (۳)

۲ (۲)

۶ (۱)

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2-x & x < 1 \end{cases} \quad g(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \quad f(x) = (x-3)^2$$

۴) صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

**تست ۵:** اگر تابع زیر در  $x = 1$  ناپیوسته‌اند؟  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} + mx & x > 2 \\ x + n & x = 2 \\ [-x] + 4x & x < 2 \end{cases}$

۵ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۸ (۱)

### پیوستگی تابع روی بازه

تابع  $f$  روی بازه  $[a, b]$  پیوسته است هرگاه:

(۱) روی بازه  $(a, b)$  پیوسته باشد.

(۲) در  $x = a$  پیوستگی چپ داشته باشد. (۳) در  $x = b$  پیوستگی راست داشته باشد.

**نکته:** تابع  $f$  تابعی پیوسته است، هرگاه در همه نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد.

**مثال:** تابع  $f(x) = \sqrt{2x - 4}$  بر بازی  $(2, +\infty)$  پیوسته است. زیرا:

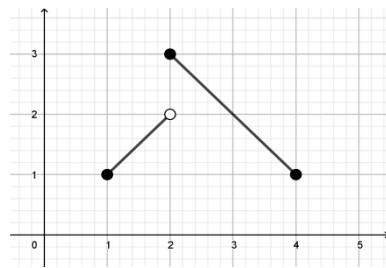
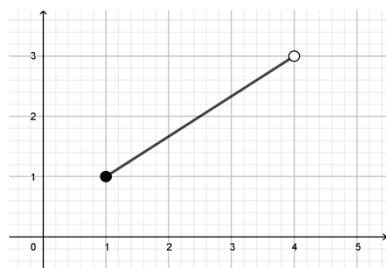
$$a \in (2, +\infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \cdot$$

**مثال:** تابع  $f(x) = 2x + 1$ , بر مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. زیرا:

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



**مسئلہ ۴:** پیوستگی تابع  $f$  را روی بازه  $[1, 4]$  بررسی کنید.



**مسئلہ ۵:** تابعی رسم کنید کہ:

(الف) در  $x = 1$  حد داشته باشد ولی پیوسته نباشد.

(ب) در  $x = 0$  فقط پیوسته چپ باشد.

$$f(x) = (x^4 + 1)(1 - \Delta x^3) \quad (4)$$

$$f(x) = 2^x \quad (3)$$

$$f(x) = \sin x \quad (2)$$

$$f(x) = \lceil x \rceil \quad (1)$$

**مسئلہ ۶:**

- کدام تابع در  $\mathbb{R}$  پیوسته نیست؟ ( ) نماد جزء صحیح است.

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

**مسئلہ ۷:**

- تابع  $f(x) = \sin x$  در چند نقطه از بازه  $[0, 2\pi]$  ناپیوسته است؟

تابع  $f(x) = x[x]$  در بازه  $(-1, k)$  پیوسته است، حداکثر مقدار  $k$  کدام است؟ ( ) علامت جزء صحیح است.

(۱) ۴

$\frac{1}{2}$  (۳)

صفر (۲)

$\frac{-1}{2}$  (۱)

**مسئلہ ۸:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & ; x > 0 \\ a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

تابع با خاصیتی (تجربی ۸۶)

(۴) هر مقدار  $a$

(۳) هیچ مقدار  $a$

(۲) ۴

(۱) ۰

**مسئلہ ۹:**

(تجربی ۸۶)

(( اهم علی(ع): ایده، صبوری در سختی و گرفتاری است و شکرگزاری در آسایش و نعمت. ))

**مسئله ۱۰:** (تجربی خارج ۸۶) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x - 1 & ; x > 1 \\ x - 1 & ; x = 1 \\ ax - a + 3 & ; x \leq 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$ ، در نقطه  $x = 1$  پیوسته است؟

۴) هر مقدار  $a$ ۳) هیچ مقدار  $a$ 

۲) فقط ۲

۱) فقط  $\frac{1}{2}$ 

(تجربی خارج ۸۷)



**مسئله ۱۱:** (تجربی خارج ۸۷) در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{4x}}{1 - x} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته است؟

۱) ۲

-۱

-۱

-۲

(تجربی خارج ۸۷)



**مسئله ۱۲:** (تجربی خارج ۸۷) به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & , x \geq -1 \\ x^2 + ax & , x < -1 \end{cases}$  در  $x = -1$  پیوسته است؟

R (۴)

Φ (۳)

{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}} (۲)

{1, \sqrt{2}} (۱)

(تجربی خارج ۸۷)



**مسئله ۱۳:** (تجربی خارج ۸۸) به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a + \sin^2 x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos^2 x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  پیوسته است؟

۴) هیچ مقدار  $a$ 

\frac{1}{2} (۳)

-\frac{1}{2} (۲)

-\frac{3}{2} (۱)

(تجربی خارج ۸۸)



**مسئله ۱۴:** (تجربی خارج ۸۹) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a + \sin rx & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos rx & \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  پیوسته است.

۵ (۴)

۴ (۳)

-۴ (۲)

-۵ (۱)

- $a - b$  کدام است؟

(تجربی خارج ۸۹)



(( هرچا موقوفه‌یت بزرگی بینید، اینها از ناکاهی‌ها را در مسیر آن مشاهده می‌کنند. ))

**مسئله ۱۶:** - تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x-2|}{x-1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x=1 \end{cases}$  پیوسته است؟

(تجربی خارج ۹۰)

۴) هیچ مقدار a

۳ (۳)

-۳ (۲)

۱) هر مقدار a



**مسئله ۱۷:** . تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & ; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & ; \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$  کدام است؟

(تجربی خارج ۹۰)

۱) ۴

- $\frac{1}{2}$  (۳)

۲) صفر

-۱ (۱)



**مسئله ۱۸:** به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2+ax-5 & ; x>2 \\ ax-1 & ; x \leq 2 \end{cases}$  بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

(تجربی ۹۱)

a=۲ (۴)      a=-۲ (۳)      ۲) هیچ مقدار a      ۱) هر مقدار حقیقی a

**مسئله ۱۹:**

- تابع  $f(x) = 3x + [x]$  در کدام‌یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟ ([ نماد جزء صحیح است).

[۰,۱] (۴)

(۲,۳] (۳)

[۱,۲) (۲)

(-۱,۱) (۱)



**مسئله ۲۰:** اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax+b & ; x>2 \\ x^2+bx-1 & ; x \leq 2 \end{cases}$  با شرط  $f(2)=5$  بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟

(تجربی خارج ۹۱)

تست ۲۱:  
تجربی (۹۲)

به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & ; x < 2 \\ a & ; x = 2 \\ x + 2 & ; x > 2 \end{cases}$  پیوسته است؟

(۴) هیچ مقدار

۵ (۳)

۴/۵ (۲)

۴ (۱)



به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$  بروی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است؟

تست ۲۲:  
تجربی (۹۴)

\frac{1}{2} (۴)

\frac{1}{4} (۳)

-\frac{1}{4} (۲)

-\frac{1}{2} (۱)



به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; 0 < x < a \\ 1 - \frac{x}{4} & ; x \geq a \end{cases}$  همواره پیوسته است؟

تست ۲۳:  
ریاضی خارج (۹۵)

(۴) هیچ مقدار  $a$ 

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



تست ۲۴: چه تعداد از توابع زیر روی دامنه خود پیوسته‌اند؟

$$h(x) = \sqrt{x+2} \quad (\text{ج})$$

۲ (۴)

۲ (۳)

$$g(x) = [x] \quad (\text{ب})$$

۱ (۲)

$$f(x) = \log_2 x \quad (\text{الف})$$

۱ (۱) صفر



- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ k & ; x = 2 \end{cases}$  در  $x = 2$  پیوسته باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

تست ۲۵:  
تجربی (۹۶)

۵ (۴)

-۵ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)



دانلود از سایت ریاضی سرا



تعريف آمار: آمار، مجموعه از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

تعريف علم آمار: علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاؤت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

جمع آوری  
اعداد و ارقام

سازماندهی و  
نمایش

تحلیل و تفسیر  
داده‌ها

نتیجه گیری



تعريف جامعه و جمعیت: به مجموعی تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت می‌گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شوند و هریک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌نامیم.

نکته: به تعداد اعضای جامعه اندازه یا حجم جامعه می‌گوییم.

تعريف نمونه: به بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه می‌گوییم و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه می‌گوییم.

نکته: به تعداد اعضای نمونه اندازه یا حجم نمونه می‌گوییم.

تست: با توجه به جمله "کیفیت مرکبات مازندران، درجه یک است" کدام گزینه درست است؟

۱. جامعه: مرکبات ایرانی ۲. نمونه: مردم مازندران ۳. متغیر: مرکبات مازندران ۴. مقدار متغیر: درجه‌یک

جواب: در این بررسی، جامعه آماری مرکبات مازندران، نمونه بخشی از مرکبات مازندران است. همچنین متغیر مورد بررسی کیفیت مرکبات است و مقدار متغیر درجه یک است. پس گزینه ۴ صحیح است.

**تست ۱:** برای بررسی موضوع زیر ۱۰۰ دانشآموز سال دهم رشته انسانی مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

«دانشآموزان سال دهم انسانی چرا در درس ریاضی ضعف دارند»

در این بررسی جامعه آماری و نمونه آماری به ترتیب کدام است؟

۱) ۱۰۰ دانشآموز مورد مطالعه - حداقل ۲) ۱۰۰ دانشآموز بعنوان نمونه باید انتخاب شوند.

۳) کل دانشآموزان رشته انسانی در تمام پایه‌ها ۴) کل دانشآموز مورد مطالعه

۵) کل دانشآموزان پایه دهم در تمام رشته‌ها (ریاضی، تجربی، انسانی) - ۶) ۱۰۰ دانشآموز مورد مطالعه

۷) کل دانشآموزان پایه دهم انسانی - ۸) دانشآموز مورد مطالعه



**تست ۲:** - می خواهیم در شهر A نسبت افرادی را که دارای گروه خونی O هستند، به افرادی که دارای گروه خونی دیگری هستند به دست آوریم. برای این منظور، کل افراد ساکن در محله A از این شهر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این تحقیق، جامعه آماری و نمونه به ترتیب کدام است؟

۱) کل افرادی که در شهر A دارای گروه خونی O هستند- افراد محله B

۲) کل افراد شهر A- افرادی در محله B که دارای گروه خونی O هستند.

۳) کل افراد شهر A- کل افراد محله B

۴) کل افرادی که در شهر A دارای گروه خونی O هستند- کل افرادی که در محله B دارای گروه خونی O هستند.



دانلود از سایت ریاضی سرا

((اهم صادق (ع): از تبلیغ و بیوحت‌لکی پرهیز، زیرا که این دو خصلت تو را از بهره دنیا و آخرت باز همی‌دارند. ))

### سته: کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) اندازه جامعه همواره از حجم جامعه کوچک‌تر است.

۲) اندازه نمونه همواره از اندازه جامعه کمتر است.

۳) مجموعه تمام افرادی که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد را نمونه گویند.

۴) اولین قدم در «علم آمار» جمع‌آوری داده‌ها است.

در رابطه با موضوع زمان تأخیر دانش‌آموزان یک دبیرستان، زمان تأخیر ۳۰ دانش‌آموز را بررسی کردند. در این موضوع جامعه‌ی آماری، متغیر و نمونه به ترتیب کدام‌اند؟

۱) کل دانش‌آموزان دبیرستان - فاصله‌ی منزل تا دبیرستان - دانش‌آموزان یک کلاس

۲) ۳۰ دانش‌آموز موردنظر - زمان تأخیر دانش‌آموزان - کل دانش‌آموزان دبیرستان

۳) دانش‌آموزان یک کلاس - فاصله‌ی منزل تا دبیرستان - کل دانش‌آموزان دبیرستان

۴) کل دانش‌آموزان دبیرستان - زمان تأخیر دانش‌آموزان - ۳۰ دانش‌آموز موردنظر

در یک کارخانه‌ی تولیدی کل قطعات تولید شده در یک ماه ده‌هزار قطعه است. برای بررسی کیفیت قطعات ۲۰۰ ماه اردیبهشت ۲۰۰ قطعه از قطعات تولیدی آن ماه به تصادف انتخاب کرده‌ایم. به ترتیب اندازه‌ی نمونه کدام است و چند درصد از حجم جامعه در نمونه بررسی شده است؟

۱) ۱۰۰۰ و ۲۰ ۲۰۰ و ۲ ۲۰۰ و ۲۰۰۰ ۳ و ۲۰۰ ۴ و ۲۰۰

برای بررسی قد دانش‌آموزان یک کلاس، نیازمند انتخاب نمونه‌ی تصادفی از این کلاس هستیم. کدام یک از گزینه‌های زیر نمونه‌ی مناسب برای جامعه‌ی آماری در نظر گرفته شده نیست؟

۱) از هر نیمکت یک نفر را به تصادف انتخاب کنیم. ۲) ۱۰ نفر اول کلاس از نظر معدل را انتخاب کنیم.

۳) دانش‌آموزان ردیف آخر کلاس را انتخاب کنیم. ۴) ۱۵ نفر انتهایی لیست را انتخاب کنیم.

مراحل علم آمار به ترتیب به صورت زیر است. جاهای خالی کدام است؟

«جمع‌آوری - ..... - تحلیل و تفسیر - ..... »

۱) سازمان‌دهی و تمایش - نتیجه‌گیری، قضاؤت و پیش‌بینی

۲) قضاؤت و پیش‌بینی - سازمان‌دهی و تمایش

۳) تمایش داده‌ها - پیش‌بینی

۴) سازمان‌دهی - تمایش

دانلود از سایت ریاضی سرا



**شاخص توده‌ی بدنی (نماتوب):** شاخصی است جهت تعیین نرمال بودن وزن افراد نسبت به قد آنها.

**نکته:** برای تعیین کردن شاخص توده‌ی بدنی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{شاخص توده‌ی بدنی} = \frac{\text{وزن(کیلوگرم)}}{\text{مجذور قد(متر)}}$$

**نکته:** در جدول زیر شاخص توده‌ی مطلوب، آمده است:

گروه سنی	۱۹ - ۲۴	۲۵ - ۳۴	۳۵ - ۴۴	۴۵ - ۵۴	۵۵ - ۶۴	بیشتر از ۷۵
شاخص سلامت نرمال	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷

**مسئله ۸:** یک فرد ۴۸ ساله با قد ۲۰۰ سانتی متر، چه وزنی باید داشته باشد، تا شاخص سلامت او برابر مقدار مطلوب باشد؟

۱۱.kg (۴)

۱۰.kg (۳)

۹.kg (۲)

۸.kg (۱)



**مسئله ۹:** اگر شاخص توده‌ی بدنی (نماتوب) فردی برابر ۲۶ و وزن او تقریباً ۵۸/۵ کیلوگرم باشد، قد این شخص چند سانتی متر است؟

۱۷۰ (۴)

۱۶۵ (۳)

۱۵۰ (۲)

۱۴۵ (۱)



**مسئله ۱۰:**

فردی ۱۶ ساله، دارای نماتوب ۲۲ و قد ۱۵۰ سانتی متر می‌باشد. وزن او چند کیلوگرم است؟

۵۰/۵ (۴)

۵۰ (۳)

۴۹/۵ (۲)

۴۹ (۱)



**مسئله ۱۱:**

شاخص توده‌ی بدنی شخصی برابر ۳۰ است. اگر قد این شخص ۱۵۰ سانتی متر باشد، وزن او چند کیلوگرم است؟

۷۵/۶ (۴)

۷۶/۵ (۳)

۶۷/۵ (۲)

۶۵/۷ (۱)



دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۱۲:** اگر قد شخصی  $1/7$  متر و شاخص توده‌ی بدن او  $20$  باشد، نسبت وزن به قد این شخص چقدر است؟

۴۳ (۴)

۳۴ (۳)

۲۱/۷ (۲)

۲۰ (۱)



**تست ۱۳:** اگر شاخص توده‌ی بدن یک شخص با قد  $190$  سانتی‌متر برابر  $30$  باشد، وزنش چند کیلوگرم است؟

۱۱۰/۳ (۴)

۱۰۵/۳ (۳)

۱۰۷/۵ (۲)

۱۰۸/۳ (۱)



**تست ۱۴:** کدام یک از جملات زیر نادرست است؟

۱) اولین قدم در استفاده از علم آمار، جمع‌آوری داده‌هاست.

۲) جمع‌آوری افراد چاق یک شهر کار آساتی نیست و این اندازه‌گیری نیاز به نمونه‌گیری دارد.

۳) در بررسی قد دانش‌آموزان یک مدرسه‌ی  $14$  انفراد، حجم جامعه می‌تواند  $200$  باشد.۴) اگر شاخص توده‌ی بدنی شخصی برابر  $36$  باشد، چاقی درجه دو دارد.

**تست‌ها:** علی و حسن، هم‌قد هستند. اگر وزن علی یک و نیم برابر وزن حسن باشد. آن‌گاه شاخص توده‌ی بدن علی چند برابر شاخص توده‌ی بدن حسن است؟

۱/۲۵ (۴)

 $\frac{7}{9}$  (۳) $\frac{2}{3}$  (۲)

۱/۵ (۱)





**تعریف متغیر:** هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود، متغیر نامیده می‌شود.

**مثال:** در بررسی وزن یا سن یا معدله دانشآموزان یک کلاس، ویژگی‌های وزن یا سن یا معدله متغیر مساله هستند.

### انواع متغیرها:

**ا. متغیرهای کمی:** متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند و مقادیر عددی می‌گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع تفریق و معدله‌گیری قابل انجام است را متغیرهای کمی می‌نامیم. دو نوع متغیر کمی داریم:

**(الف) متغیر کمی پیوسته:** متغیری که اگر دو مقدار و را بتواند اختیار کند، آنگاه هر مقداری بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. مانند وزن و سن افراد.

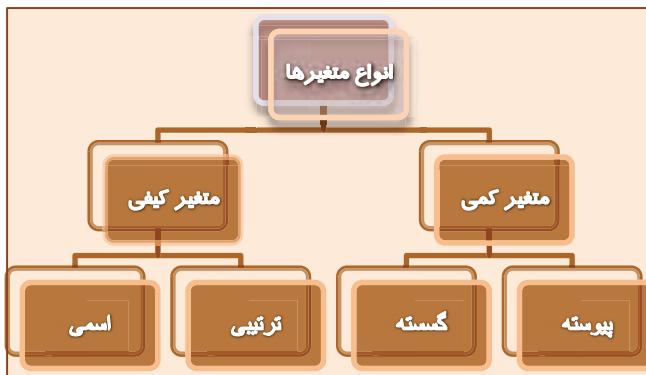
**(ب) متغیر کمی گسسته:** متغیری که اگر دو مقدار و را بتواند اختیار کند، مقداری بین آنها وجود دارد که نمی‌تواند اختیار کند. مانند تعداد طبقات ساختمان یا تعداد برد های یک تیم.

**مثال:** سرعت و میزان مصرف بنزین هر خودرو یک متغیر کمی پیوسته است. ولی تعداد سرنشینان مجاز یا تعداد درب‌های آن، متغیر کمی گسسته است.

**(ا) متغیر کیفی:** متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند و صرفا برای دسته‌بندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به کار می‌روند و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرند را متغیرهای کیفی می‌نامیم. دو نوع متغیر کیفی داریم:

**(الف) متغیر کیفی اسمنی:** در این نوع متغیرها هیچ معیاری که با آن بتوان داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد، وجود ندارد. مانند گروه خونی افراد، جنسیت افراد و نوع آلاینده‌های هوا.

**(ب) متغیر کیفی ترتیبی:** این متغیرها قابل مرتب کردن هستند و در عین حال محاسبه اختلاف بین مقادیر داده‌ها، یا امکان پذیر نیست یا بمعناست. مانند مراتب تحصیلی، مدارج نظمی و وضعیت هوا.



**تست ۱۷:** هر یک از مقادیر «۵۰ سانتی‌متر، قرمز، درجه ۲، متوسط» به ترتیب از راست به چه نوع

متغیری می‌تواند باشد؟



- (۱) کمی گسته، کیفی اسمن، کمی گسسته، کیفی ترتیبی
- (۲) کمی پیوسته، کیفی اسمن، کمی گسسته، کیفی اسمن
- (۳) کمی گسته، کیفی ترتیبی، کیفی ترتیبی، کیفی اسمن
- (۴) کمی پیوسته، کیفی اسمن، کیفی ترتیبی، کیفی ترتیبی

دانلود از سایت ریاضی سرا

(()) هیچ وقت به کسان این که وقت دارد نشانید، زیرا در عمل خواهد دید که همیشه وقت کم و کوتاه است.

### تست ۱۷: متغیرهای «شاخص توده بدن افراد»، «درجه‌های افراد در یک ارگان نظامی»، «جنسیت افراد» و «تعداد

فارغ‌التحصیلان سالانه یک دانشگاه به ترتیب از راست به چه نوع کمیت‌هایی هستند؟

- (۱) کمی پیوسته - کیفی ترتیبی - کمی اسمی - کمی گستته
- (۲) کمی گستته - کیفی ترتیبی - کمی اسمی - کمی پیوسته
- (۳) کمی پیوسته - کمی گستته - کیفی ترتیبی - کمی گستته
- (۴) کمی پیوسته - کیفی ترتیبی - کمی اسمی - کمی پیوسته

### تست ۱۸: نوع کدام متغیر با بقیه متفاوت است؟

- (۱) حروف الفبای فارسی (آ- ب- پ- ...)
- (۴) روزهای هفته (شنبه- یکشنبه- ...)

الف: گروه خونی افراد  
کدامیک از متغیرهای زیر کمی گستته هستند؟

ب: باقیمانده تقسیم اعداد طبیعی در تقسیم بر ۱۰۰

ج: سرعت اтомبیل

د: معدل دانش‌آموزان دبیرستان

۱) صفر

۳) ۴      ۲) ۳      ۱) ۲

### تست ۱۹:

کیفیت سوالات آزمون‌های گنج (متوسط - خوب - عالی) چه نوع متغیری است؟

- (۱) کیفی - ترتیبی
- (۲) کیفی - اسمی
- (۳) کمی - پیوسته
- (۴) کمی - گستته

کدامیک از گزینه‌های زیر، متغیر کمی است؟

- (۱) آنواح هواییما
- (۲) رنگ چشم
- (۳) تعداد مسافران یک قطار

متغیری که اگر متادیر ۸ و ۹ را اختیار کند اما الزاماً نتواند هر مقدار بین آن‌ها را اختیار کند، چه نوع متغیری است؟

- (۱) کمی - پیوسته
- (۲) کمی - گستته
- (۳) کیفی - پیوسته
- (۴) کیفی - گستته

نوع پارندگی، متغیر کیفی ..... و نزد افراد یک جامعه، متغیر کیفی ..... است.

- (۱) ترتیبی - ترتیبی
- (۲) اسمی - ترتیبی
- (۳) ترتیبی - اسمی
- (۴) اسمی - اسمی

تست ۲۶: «تعداد گلبرگ‌های موجود در انواع گل» چه نوع متغیری است؟

- (۱) کمی گستته
- (۲) کمی پیوسته
- (۳) کیفی اسمی
- (۴) کیفی ترتیبی

### تست ۲۵:

کدامیک از متغیرهای زیر کیفی ترتیبی است؟

- (۱) تعداد تصادفات در شباهه روز
- (۲) میزان علاقه‌های افراد به خورش قیمه
- (۳) میزان بازدگیری بر حسب میلی متر
- (۴) رنگ مورد علاقه افراد

دانلود از سایت ریاضی سرا









(( برای رسیدن به هر موقوعیت فردی، ابتدا باید تغییری در باورهای خود ایجاد کرد. ))

**مثال ۳:** دامنه تغییرات داده‌های زیر را بیابید.

$$1) \quad 10, 12, 15, 20, 20, 50$$

$$2) \quad 5, 10, 25, 27, 30, 31$$



$$\sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2$$

$$\sigma$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}}$$

**سته ۴۴:** انحراف معیار داده‌های ۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) صفر



**سته ۴۵:** انحراف معیار داده‌های ۳ و ۲ و ۷ و ۶ و ۲ و ۱ و ۱ کدام است؟

$$1) \sqrt{\frac{7}{6}}$$

$$2) \sqrt{\frac{6}{7}}$$

$$3) \sqrt{\frac{7}{6}}$$

$$4) \sqrt{\frac{6}{7}}$$



دانلود از سایت ریاضی سرا



(()) باور ها در مورد آنچه که هستیم و آنچه که هیتوانید باشید، به درستی شخص کندهای آیندهای ها است. ( ))

در ۲۵ داده آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می باشد. اگر داده های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰، از بین آنها حذف شوند، واریانس داده های باقیمانده، کدام است؟

۱۶,۶۶ (۴)

۱۵,۳۳ (۳)

۱۴,۸۱ (۲)

۱۴,۷۲ (۱)

تست ۵۲:

(تجربی ۹۳)

میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می باشد. اگر داده های ۲۷، ۲۰ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده

(تجربی خارج ۹۳) جدید کدام است؟

۹,۶۳ (۴)

۹,۵۲ (۳)

۹,۳۶ (۲)

۹,۲۵ (۱)

تست ۵۳:

(تجربی ۹۳)

میانگین و انحراف معیار ۲۲ داده آماری به ترتیب ۱۶ و ۲ می باشد. اگر داده های ۱۷ و ۲۰ و ۱۱، به آنان افزوده شوند، واریانس ۲۵ داده حاصل کدام است؟

۵,۲ (۴)

۵,۱ (۳)

۴,۹ (۲)

۴,۸ (۱)

تست ۵۴:

(تجربی ۹۳)

- انحراف معیار داده های جدول زیر کدام است؟

$x_i$	۲	۳	۴	۵
$f_i$	۱	۲	۱	۵

 $\sqrt{2}$  (۲)

۲ (۴)

 $\sqrt{1/2}$  (۱)

۱/۲ (۳)

تست ۵۵:

(تجربی ۹۳)

نکته: مجموع انحراف داده ها از میانگین برابر صفر است.

$$(x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + \dots + (x_n - \bar{X}) = 0$$



تست ۵۶:- در یک بررسی آماری، اگر انحراف از میانگین داده ها برابر با  $a, -a, -1, 2, 1$  باشد، انحراف معیار داده ها کدام است؟

 $\sqrt{2/6}$  (۴) $\sqrt{2/4}$  (۳) $\sqrt{2/2}$  (۲) $\sqrt{2}$  (۱)

دانلود از سایت ریاضی سرا

((آچه سرنوشت ها را تعیین هی کند، شرایط زندگی همان نیست بلکه تصمیم های هاست. ))

**تست ۷:** در داده های آماری ۱۱, ۱۵, ۱۷, ۲۱, ۸, ۲, ۳، مجموع انحراف داده ها از میانگین کدام است؟

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱



**نکته:** اگر همه داده ها (که همگی صفر نیستند) برابر باشند، انحراف معیار صفر است و برعکس.

**نکته:** واریانس ۷ عدد صحیح متوالی، همواره برابر عدد ۴ است.

**نکته:** واریانس ۵ عدد صحیح متوالی، همواره برابر عدد ۳ است.

**نکته:** نسبت انحراف معیار به میانگین، ضریب تغییرات گفته می شود.



**تست ۸:** چنانچه داده ها با هم برابر باشند، انحراف معیار داده ها برابر با کدام گزینه خواهد بود؟



۴) نمی توان انتظار نظر کرد

-۱) ۱

۳) صفر

۱) ۰

**تست ۹:** اختلاف مقادیر ۷ داده از میانگین آنها اعداد صحیح متمایز و متوالی هستند، انحراف معیار داده ها چه قدر است؟



۲) ۲

$\sqrt{2}$ ) ۱

۴) ۴

$2\sqrt{2}$ ) ۳

۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰

**تست ۱۰:** در ۵ داده ای آماری زیر، اختلاف میانگین از واریانس کدام است؟



۱) ۲

۴) ۴

۱) صفر

۲) ۲

**ب) ضریب تغییرات:** نسبت انحراف معیار به میانگین ضریب تغییرات نامیده می شود و با نماد  $CV$  نشان داده

$$CV = \frac{\sigma}{X} \cdot 100\%$$



**نکته:** مزیت این ضریب آن است که به واحد اندازه گیری بستگی ندارد. بنابراین اگر داده های مربوط به یک کمیت در دو جامعه با واحد های متفاوت بیان شده باشد و یا با واحد هایی که نمی شناسیم بیان شده باشند، می توانیم برای مقایسه پراکندگی داده ها در دو جامعه از این ضریب استفاده کرد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

میانگین و واریانس داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_6$  به ترتیب ۱۵ و ۵ می‌باشد. اگر به این داده‌ها دو عدد ۱۰ و ۲۰ را اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های

سته: ۶۱

جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود؟

(۴)  $\sqrt{\frac{5}{2}}$

(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲)  $\sqrt{2}$

(۱)  $\frac{3}{2}$

قدرمطلق اختلاف از میانگین شش داده، برابر ۳ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ است. اگر مجموع این داده‌ها ۱۸ باشد، ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟

سته: ۶۲

(۲)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$

(۱)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$

(۴)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

در ۳۵ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ می‌باشد. ضریب تغییرات،

کدام است؟

سته: ۶۳

(۹۵) خارج تجربی

(۴) ۰,۳۷۵

(۳) ۰,۳۲۵

(۲) ۰,۲۷۵

(۱) ۰,۲۲۵

میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آنها  $65/44$  می‌باشد. ضریب تغییرات در طول اضلاع

این مربع‌ها، کدام است؟

سته: ۶۴

(۹۴) خارج تجربی

(۴) ۰,۲۵

(۳) ۰,۲

(۲) ۰,۱۵

(۱) ۰,۱۲

میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات  $2/5$  محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها،

کدام است؟

سته: ۶۵

(۹۵) خارج تجربی

(۴) ۲۳۶

(۳) ۲۲۴

(۲) ۲۲۲

(۱) ۲۲۹

دانلود از سایت ریاضی سرا

((اهم صادق (ع): از تبلیغاتی و بی حوصلگی پرهیز، زیرا که این دو خصلت تو را از بهره دنیا و آخرت باز همیدارند. ))

میانگین محیط مربع های برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع ها ۴۹ می باشد. ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع ها کدام است؟

۴

۵ / ۲۸ (۳)

۵ / ۲۷ (۲)

۶ / ۲۵ (۱)

(تجربی خارج (۹۲))



تست ۲۷:

در داده های آماری ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۱۰، ۹، ۸، ۸، ۷، ۶، ۶، ۴ و ۳ داده های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف کنید. ضریب

تغییرات باقیماندهی داده ها کدام است؟

۰ / ۲۵ (۴)

۰ / ۲۱ (۳)

۰ / ۱۷ (۲)

۰ / ۱۵ (۱)



تست ۲۸:

اگر واریانس داده های مثبت  $a, a, a, 3a, 3a$  برابر ۱۶ باشد، در این صورت نسبت انحراف معیار به میانگین داده ها کدام است؟

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{9}$$



تست ۲۹:

ضریب تغییرات در داده های آماری، ۰ / ۰ ۸ محاسبه شده است، اگر به هر داده مفروض ۵ واحد اضافه شود ضریب تغییرات حاصل

۰ / ۰ ۷۵ خواهد شد، میانگین داده های اویلیه کدام است؟

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۶۴ (۲)

۵۶ (۱)



تست ۷۰:

در ۵۵ داده آماری، مجموع اختلافات داده ها از عدد ۱۲ برابر صفر است و مجموع مجذورات اختلاف داده ها از

عدد ۱۲ برابر ۴۵۰ می باشد. ضریب تغییرات این داده ها، کدام است؟

۰ / ۳۵ (۴)

۰ / ۳ (۳)

۰ / ۲۵ (۲)

۰ / ۲ (۱)



دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر واریانس داده‌های  $a, b+1, c+2, d+2, 10$  برابر صفر باشد، ضریب تغییرات داده‌های

کدام است؟  $a, b, c, d, e$

$$\frac{\sqrt{2}}{8} (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (2)$$

$$\sqrt{2} (1)$$

سته: ۷۱

سته: ۷۲

(تجربی ۸۵)

در ۶۰ داده‌ی آماری، میانگین ۳ و انحراف معیار  $1/\sqrt{2}$  محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

$0/4 (4)$

$0/3 (3)$

$0/2 (2)$

$0/1 (1)$

ک

در ۱۵۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم، تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

$$\frac{8}{9} (4)$$

$$\frac{7}{8} (3)$$

$$\frac{5}{6} (2)$$

$$\frac{7}{9} (1)$$

سته: ۷۳

(تجربی ۹۲)

در داده‌های آماری با میانگین  $\bar{X}$  و انحراف معیار  $\delta$  اگر به هر یک از داده‌ها، مقدار  $\bar{X}$  را اضافه کنیم تا داده‌های جدید حاصل شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات در داده‌های قبلی است؟

$2 (4)$

$1 (3)$

$\frac{1}{2} (2)$

$\frac{1}{4} (1)$

ک

سته: ۷۴

(تجربی ۸۶)

اگر واحد اندازه‌گیری را از متر به سانتی‌متر تبدیل کنیم، انحراف معیار چه تغییری می‌کند؟

$4)$  تغییر نمی‌کند

$3)$  برابر

$2)$  برابر

$1)$  برابر

ک

سته: ۷۵

در ۱۰۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۸ و انحراف معیار ۲، تمام داده‌ها را در  $1/5$  ضرب می‌کنیم، واریانس داده‌های جدید کدام است؟

$4) 6/25 (4)$

$3) 9 (3)$

$2) 6 (2)$

$1) 4 (1)$

ک

سته: ۷۶

اگر انحراف معیار داده‌های  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  برابر ۳ باشد، واریانس داده‌های  $2x_1 + 2, 2x_2 + 2, 2x_3 + 2, \dots, 2x_n + 2$  چقدر است؟

۱۸ (۲)

۳۶ (۴)

۹ (۱)

۷۵ (۳)

ست: ۷۷



ضریب تغییرات داده‌های آماری  $\frac{1}{35}$  می‌باشد. به ۲ برابر این داده‌های آماری، عدد  $\frac{1}{4}$  میانگین آنها افزوده شده است. ضریب تغییرات داده‌های جدید، کدام است؟

۱/۲ (۴)

۱/۱۵ (۳)

۱/۰۸ (۲)

۰/۹۶ (۱)

ست: ۷۸



- اگر انحراف معیار داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر ۶ باشد، واریانس داده‌های  $2x_1 + 5, 2x_2 + 5, \dots, 2x_n + 5$  کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

ست: ۷۹



اگر واریانس داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر ۲ و میانگین برابر ۲ باشد، ضریب تغییرات داده‌های  $1 - \frac{x_1}{2}, \dots, 1 - \frac{x_n}{2}$  کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{\sqrt{5}}{19} (۳)$  $\frac{19}{5} (۲)$  $\frac{5}{19} (۱)$ 

ست: ۸۰



کدام است؟

در یک گروه از داده‌های آماری با میانگین  $\bar{x}$ ، واحد به داده‌ها اضافه نموده‌ایم، در این صورت ضریب تغییرات دو برابر شده است.

مجموع  $\bar{x}$  و  $k$  چندراست؟

(۴) صفر

۱ (۳)

- $k$  (۲)

k (۱)

ست: ۸۱



- ۸۰ داده آماری با میانگین ۱۳ و واریانس ۲ را با ۲۰ داده آماری با میانگین ۱۳ و واریانس  $\frac{1}{45}$  با هم درنظر می‌گیریم. ضریب تغییرات تمامی داده‌ها کدام است؟

۰/۱۶۹ (۴)

۰/۱۵ (۳)

۰/۱۳ (۲)

۰/۱ (۱)

ست: ۸۲



دانلود از سایت ریاضی سرا

(( درست در همان لحظه که دیگران نا امید می‌شوند، افراد موفق ادامه می‌دهند. ))



**۵) چارک اول و سوم:** میانه اعداد قبل از میانه چارک اول ( $Q_1$ ) و میانه اعداد بعد از میانه چارک سوم ( $Q_3$ ) نامیده می‌شود.

**دامنه میان چارکی:** از تفیریق چارک اول از چارک سوم به دست می‌اید.

**نکته:** اگر در داده‌ها دور افتاده موجود باشد، از میانه به جای میانگین استفاده می‌کنیم و از دامنه میان چارکی به جای انحراف معیار استفاده می‌کنیم.

در داده‌های ۲۵، ۲۵، ۱۸، ۱۴، ۱۶، ۲۰، ۲۴، ۱۵، ۱۲، ۲۶، ۲۱، ۱۲، ۲۶، ۲۱، ۱۶، ۲۰، ۲۴، ۱۵، ۱۴، ۱۶، ۱۷، ۱۸ میانگین «داده‌های بزرگتر از چارک سوم» کدام

**تست ۸۳:**

(تجربی خارج ۸۵) است؟

۱۸/۷۵ (۴)

۱۸/۶۶ (۳)

۱۸/۳۳ (۲)

۱۸/۲۵ (۱)



در ۲۳ داده‌ی آماری میانگین داده‌های قبل چارک اول و بعد چارک سوم به ترتیب  $\frac{21}{6}$  و  $\frac{33}{6}$  و میانگین سایر داده‌ها ۲۵ است.

**تست ۸۴:**

(مشابه تجربی) میانگین کل داده‌ها را بیابید.  
خارج (۹۵)



**تست ۸۵:** انحراف معیار داده‌های بین چارک اول و سوم را برای داده‌های آماری ۹، ۱۱، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۴، ۱۵، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸ کدام است؟

۱/۳ (۴)

۱/۲۵ (۳)

۱/۲ (۲)

۱/۱ (۱)

(مشابه تجربی) ۸۸



اگر در داده‌های ۱۶ و ۱۸ و ۲۰ و ۲۳ و ۱۱ و ۱۴ و ۱۷ و ۹ و ۱۹ و ۱۰ و ۵ و ۸ و ۲۱ و ۷ اعداد کمتر از چارک اول و

**تست ۸۶:**

بزرگتر از چارک سوم را حذف کنیم، ضریب تغییرات داده‌های باقی‌مانده کدام است؟



$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$2\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{2}$$

تست: ۸۷

دامنه میان‌چارکی (IQR) داده‌های ۱۲، ۲۰، ۳۰، ۳۲، ۲۸، ۴۰، ۲۵، ۲۲، ۳۰، ۲۸، ۴۰ کدام است؟

۱۰ (۱)

۱۳ (۲)

۱۵ (۳)

۱۸ (۴)



تست: ۸۸

اگر به داده‌های آماری ۸، ۱۱، ۸، ۲۰، ۱۱، ۴، ۸، ۳، سه داده‌ی ۱۲، ۸، ۵ را اضافه کنیم، چارک سوم چه تغییری می‌کند؟

- (۱) یک واحد اضافه می‌شود.      (۲) یک واحد کم می‌شود.      (۳) نیم واحد اضافه می‌شود.      (۴) نیم واحد کم می‌شود.





m

m + n

n

$$2+3=5$$

n

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120, \quad 10! = 10 \times 9!, \quad 13! = 13 \times 12 \times 11!$$

$$0! = 1$$

m

n

n × m

$$\boxed{4} \times \boxed{3} = 12$$

$$\boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 60$$

n

 $\wedge!$ 

$$(n-1)!$$

n

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

$$(12-1)! = 11!$$

**مسئلہ:** با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ و ۹ و بدون تکرار ارقام الف) چند عدد سه رقمی ب) چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟ پ) با

این اعداد چند کد سه رقمی می توان ساخت؟



**تست:** در یک منطقه آموزش و پرورش، ۳ ناحیه و در هریک از این ناحیه‌ها، ۸ مدرسه دوره دوم متوسطه و در هریک از این مدارس، ۶ کلاس دهم وجود دارد. در این منطقه چند کلاس دهم وجود دارد؟

۴۸ (۴)

۹۶ (۳)

۷۲ (۲)

۱۴۴ (۱)



((آنچه را هیشتوید، فراموش هیکنید، آنچه را هیبینید، به خاطر هیسپارید، آنچه را انجام هیدهیم، درک هیکنید. ))

**تست ۲:** با ارقام یک تا پنج، چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت که در آن اعداد فرد کنار هم باشند؟

۴۸

۳۶

۲۴

۱۲



**تست ۳:** چهار کتاب ریاضی و سه کتاب فیزیک را به چند طریق می‌توان کنار هم چید، به طوری که کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند؟

$$\frac{7!}{4!3!}$$

۴!۴!

(۳)

۴!۳!

۲!۴!۳!

(۲)

۲!۴!۳!



**تست ۴:** چهار کتاب ریاضی و سه فیزیک را به چند طریق می‌توان کنار هم چید به طوری که کتاب‌های ریاضی یکی در میان باشند؟

۵۷۶

۳۴۲

۱۴۴

۱۲۰



**تست ۵:** - ۵ کتاب مختلف با موضوع زیست را به چند طریق می‌توان همراه با ۶ کتاب ریاضی متمايز در یک قفسه در کنار هم قرار دارد، به طوری که کتاب‌های زیست حتماً کنار هم باشند؟

۶!×۷!

(۴)

۵!×۷!

(۳)

۲×۵!×۶!

(۲)

۵!×۶!

(۱)



**تست ۶:** - یک سالن آمفی تئاتر ۱۰ در در دارد. به چند طریق می‌توان از یک در وارد سالن شد و از در دیگر خارج شد؟

۱۰

(۳)

۹۰

۱۰۰



**تست ۷:** با حروف کلمه «پر迪س» چند کلمه ۳ حرفی با حروف غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۶۰

(۳)

۳۴

۴۳



**تست ۸:** یک اتوبوس با ۱۰ مسافر در ۱۲ ایستگاه توقف می‌کند و همه مسافرین در این ایستگاه‌ها از اتوبوس پیاده می‌شوند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱۴۴

(۳)

۱۰۱۲

۱۲۰



دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۹:** - به چند طریق می‌توان رئوس یک چهارضلعی را با ۳ رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم رنگ نباشند؟

۲۴) ۴

۱۸) ۳

۱۲) ۲

۳۶) ۱



**تست ۱۰:** - به چند طریق ۴ دانشآموز و ۳ معلم می‌توانند برای گرفتن عکس یادگاری کنار هم بایستند، به طوری که معلم‌ها کنار هم باشند؟

۲!×۴!×۳! (۴)

۷!×۳! (۳)

۳!×۵! (۲)

۴!×۴! (۱)



**تست ۱۱:** - با استفاده از ۴ رنگ قرمز، سبز، زرد و آبی به چند طریق می‌توان پنج خانه کنار هم را که در یک ردیف قرار گرفته‌اند، رنگ کرد؛ به طوری که خانه‌های مجاور هم رنگ نباشند؟

۲۴۳ (۴)

۱۰۲۴ (۳)

۳۲۴ (۲)

۵۷۶ (۱)



**تست ۱۲:** به چند طریق می‌توان یک رمز ۳ رقمی با ارقام ۱ تا ۹ ساخت به‌طوری که ارقام یک‌دیگر میان زوج و فرد باشند؟ (تکرار ارقام مجاز است).

۲۵۰ (۴)

۲۰۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۱۴۰ (۱)



**تست ۱۳:** - کدام گزینه نادرست است؟

$$\cdot ! = 1! \quad (۲)$$

$$2! \times 2! \times 3! = 4! \quad (۴)$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n^2 - n \quad (n > 2) \quad (۱)$$

$$4! \times 2 = 8! \quad (۳)$$



۱۱×۱۳! (۴)

۱۱×۱۳ (۳)

۱۱ (۲)

۱۳ (۱)



**تست ۱۵:** - با حروف کلمه «ماسوله» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که بخشی از آن کلمه «سلام» باشد؟

۴×۳! (۴)

۳×۳ (۳)

۲×۳! (۲)

۳! (۱)



**تست ۱۶:** - با ارقام ۱,۰,۵,۴,۳,۲ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهار رقمی زوج بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ می‌توان نوشت؟

۶۰ (۴)

۴۸ (۳)

۷۲ (۲)

۹۶ (۱)



(( داشتن فکر و اندیشه ثابت به تنهایی کافی نیست، هر موفقیت بزرگ با عدل به دست هی آید. ))

- محمد و علی به همراه ۳ دوست دیگران در صفت نانوایی ایستاده‌اند. علی به‌رسم ادب هیچ‌گاه جلوتر از محمد نان نمی‌خرد. این افراد به چند طریق می‌توانند در صفت نانوایی پشت‌سرهم بایستند؟

(۱) ۱۲۰ (۴)

(۲) ۶۰ (۳)

(۳) ۳۰ (۲)

(۴) ۱۵ (۱)



۱۰ نظر به ترتیب سوار اتوبوس می‌شوند. اگر علی قبل از توید سوار اتوبوس شود، چند حالت برای سوار شدن این ۱۰ نفر وجود دارد؟

(۱)  $\frac{1+!}{1}$  (۴)(۲)  $2 \times 1 + !$  (۳)

(۳) ۵! (۲)

(۴) ۱۰! (۱)



- یک آزمون تستی شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۳ سؤال ۲ گزینه‌ای است. اگر فردی بخواهد به‌طور تصادفی به همه سؤالات پاسخ بدهد، به چند روش می‌تواند این کار را انجام بدهد؟ (امکان پاسخ ندادن به هیچ سؤالی وجود ندارد).

(۱)  $4^{10} \times 3^2$  (۴)(۲)  $4^{10} \times 2^3$  (۳)(۳)  $4^{10}$  (۲)(۴)  $10^3 \times 3^2$  (۱)

۱۱ با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳، ۶ و ۷ و بدون تکرار ارقام، چند عدد سه‌ رقمی می‌توان ساخت به‌طوری که حتماً شامل ۲ باشد؟

(۱) ۳۶ (۴)

(۲) ۴۸ (۳)

(۳) ۴۸ (۲)

(۴) ۵۲ (۱)



۱۲ پنج پسر به همراه پدرشان به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم بشینند به‌طوری که هر فرد بخواهد کنار پدرش باشد؟

(۱)  $32 \times 10!$  (۴)(۲)  $10!$  (۳)(۳)  $32 \times 5!$  (۲)

(۴) ۵! (۱)



۱۳ از شهر A تا شهر B، ۴ راه و از شهر C، ۳ راه و از شهر D تا شهر C، ۲ راه وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت و دوباره به شهر A برگشت به‌طوری که از هر مسیر حداقل

یک بار عبور کنیم و از تمام شهرها عبور کنیم؟

(۱) ۹۶ (۴)

(۲) ۱۰۴ (۳)

(۳) ۱۴۴ (۲)

(۴) ۱۴۲ (۱)



۱۴ چند عدد پنج‌رقمی طبیعی بدون ارقام تکراری وجود دارد که رقم سمت چپ آن‌ها فرد و هم‌جنین ارقام آن یکی در میان زوج و فرد باشد؟

(۱) ۱۱۰۰ (۴)

(۲) ۱۲۰۰ (۳)

(۳) ۱۳۰۰ (۲)

(۴) ۱۴۰۰ (۱)



۱۵ چند عدد سه‌رقمی مضرب ۵ وجود دارد که رقم یکان و صدگان آن با هم برابر باشند؟

(۱) ۲۰ (۴)

(۲) ۱۰ (۳)

(۳) ۲۵۰ (۲)

(۴) ۵۰ (۱)



دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۲۵:** چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت که ارقام آن‌ها اعداد اول باشند؟

۳۶ (۴)

۳۴ (۳)

۱۶ (۲)

۲۸ (۱)



**تست ۲۶:** چند عدد سه رقمی با ارقام فرد و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که بر ۳ بخش بذیر باشند؟

۲۴ (۴)

۲۰ (۳)

۴۸ (۲)

۱۰ (۱)



**تست ۲۷:** - چند عدد طبیعی با ارقام متمایز وجود دارد که تمامی ارقام آن عدد اول باشد؟

۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۳۶ (۲)

۲۲ (۱)



$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

n
r
n

a)  $P(12, 3) = \frac{12!}{9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 1320$ 
b)  $\boxed{12} \times \boxed{11} \times \boxed{10} = 1320$

n!
n

$\boxed{8} \times \boxed{6} \times \boxed{4} = 120$ 
,  $8! = 720$

$$\frac{n!}{r_1!r_2! \dots}$$

a)  $\frac{8!}{2!2!}$

b)  $\frac{8!}{3!2!}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

**سته: ۲۸**: اگر  $p(n, 4) = 4 \cdot p(n-1, 2)$  باشد،  $n$  کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۵

۳ (۱)

**سته: ۲۹**: اگر  $P(n, n-1) \cdot P(\beta, \gamma) = P(\gamma, \tau) + P(\delta, \tau) + n$  کدام است؟ $\frac{328!}{2!} (4)$  $328 \times 327 (3)$  $328! (2)$  $328 (1)$ **سته: ۳۰**: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که S ها کنار هم نباشند. کدام است؟

۴۶۰ (۴)

۲۴۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

(تجربی خارج ۹۲)

**سته: ۳۱**: با حروف I, R, A, N, O, H, M چند کلمه ۵ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که با O آغاز و به M ختم شود؟

P(5, 5) (4)

P(7, 5) (3)

P(5, 3) (2)

P(7, 3) (1)

**سته: ۳۲**: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب متمایز را بین ۵ نفر تقسیم کرد، به طوری که به هر نفر بیش از یک کتاب نرسد؟

۱۲۰ (۴)

۶۰ (۳)

۵۳ (۲)

۳۵ (۱)

**سته: ۳۳**: - تعدادی دبیر ریاضی داریم که تمام آن‌ها توانایی تدریس درسنامه‌ای آمار، ریاضی و هندسه را دارند. اگر معاون یک مدرسه بخواهد برای انتخاب دبیر دروس آمار، ریاضی و هندسه از بین این دبیران، برای هر درس دبیر متفاوت انتخاب کند، ۱۲۰ حالت دارد. تعداد این دبیران چند نفر است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۷ (۱)

**سته: ۳۴**: با حروف کلمه‌ی «SIROUS»، چند کلمه‌ی شش حرفی می‌توان نوشت به طوری که R قبل از O و O قبل از U باید؟

۱۲۰ (۴)

۶۰ (۳)

۶۴ (۲)

۵۶ (۱)



دانلود از سایت ریاضی سرا

(( دو مورد از بدترین اشتباهات قربانی کردن اهداف توسط افکار دیگران و فکر کردن به محدودیتها قبل از اقدام به عمل است. ))

**مسئله ۳۵:** می خواهیم از بین تعدادی کتاب مختلف، ۳ کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد همه حالت‌های مختلف برای این کار برابر باشد، تعداد کتاب‌ها کدام است؟

۲۱۰



۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

**مسئله ۳۶:** به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟

۹۰ (۴)

۷۲ (۳)

۶۰ (۲)

۵۴ (۱)



**نکته:** تعداد جایشگت‌های  $1 - n$  تایی از  $n$  شی با جایشگت‌های  $n$  تایی از آن برابرند.



**مسئله ۲:** تعداد جایگشت‌های چهار رقمی که با ارقام ۲, ۳, ۱, ۲, ۵ می‌توان نوشت را بیابید.



**مسئله ۳:** الف) تعداد اعداد پنج رقمی که می‌توان با ارقام ۳, ۰, ۰, ۰, ۲ ساخت را بیابید.

ب) تعداد اعداد چهار رقمی که می‌توان با ارقام ۳, ۰, ۰, ۰, ۲ ساخت را بیابید.

ج) تعداد اعداد سه رقمی که می‌توان با ارقام ۳, ۰, ۰, ۰, ۲ ساخت را بیابید.



**مسئله ۴:** تعداد اعداد پنج رقمی فرد که می‌توان با ارقام ۱, ۲, ۳, ۲, ۰ ساخت را بیابید.



دانلود از سایت ریاضی سرا



n      r

r

n

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}, \quad \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r(r-1)\dots1}$$

$$\binom{8}{8} = \binom{8}{0} = 1, \quad \binom{8}{1} = \binom{8}{7} = 8, \quad \binom{8}{2} = \binom{8}{6} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 35, \quad \binom{8}{3} + \binom{8}{1} = \binom{10}{2}$$

**تست ۳۷:** حاصل کدام است؟

$$\binom{50}{19} (۴) \quad \binom{26}{11} (۳) \quad \binom{25}{11} (۲) \quad \binom{26}{10} (۱)$$

**تست ۳۸:** حاصل عبارت کدام است؟

$$\binom{22}{16} + \binom{22}{8} - \binom{22}{14} - \binom{22}{6}$$

(۴) صفر

۴۶۲ (۳)

۷۳۱۵ (۲)

۱۰ (۱)



**مثال:** تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را بیابید.



**مثال:** به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ نفر سه نفر را انتخاب کرد؟



دانلود از سایت ریاضی سرا

- مسئلہ ۷:** کیسے ای شامل ۶ مہرہ سیاہ، ۵ مہرہ سبز و ۳ مہرہ آبی است. ۳ مہرہ از آن خارج می کنیم. مطلوب است تعداد حالت ممکن کہ در آن: الف) سه مہرہ سبز باشند.  
ب) هر سه غیر همرنگ باشند.  
ج) حداقل دو آبی باشد.  
د) هر سه هم رنگ باشند.  
ه) لااقل دو سیاہ باشد.



**تست ۳۹:** با ۷ نقطہ A, F, E, D, C, B, G روی محيط یک دایره چند مثلث مختلف می توان ساخت که رئوس آنها از این ۷ نقطہ انتخاب شده باشد؟

۳۵ (۴)                  ۱۰۵ (۳)                  ۱۵ (۲)                  ۲۱۰ (۱)



**تست ۴۰:** در جعبه ای ۴ مهره قرمز متمایز و ۳ مهره آبی متمایز موجود است. اگر به تصادف از این جعبه ۴ مهره خارج کنیم، پیشامد آنکه «۲ مهره قرمز و ۲ مهره آبی باشد» چند عضو دارد؟

۴ (۴)                  ۷ (۳)                  ۱۸ (۲)                  ۱۲ (۱)



**تست ۴۱:** گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل، از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل متفاوت می تواند درست کند؟

۳۷۸ (۴)                  ۴۸۲ (۳)                  ۷۳۰ (۲)                  ۵۸۲ (۱)



**تست ۴۲:** چه تعداد از زیرمجموعه های مجموعه  $\{a, b, c, d, e\}$  دارای ۲ عضو a و b هستند؟

۴ (۴)                  ۱۶ (۳)                  ۲ (۲)                  ۸ (۱)



**تست ۴۳:** مجموعه A =  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد که شامل عضوهای  $a_1$  و  $a_2$ ، ولی قادر عضوهای  $a_9$  و  $a_{10}$  باشد؟

۱۲۰ (۴)                  ۵۶ (۳)                  ۸ (۲)                  ۲۰ (۱)



**تست ۴۴:** تعداد زیرمجموعه هی سه عضوی مجموعه  $\{a, b, c, d, e, f\}$  که شامل عضو f باشد و عدد ۱ نباشد، چند تاست؟

۳۵ (۴)                  ۵ (۳)                  ۱۰ (۲)                  ۱۲ (۱)



**تست ۴۵:** یک نقاش قوطی‌هایی از ۶ رنگ مختلف دارد. او با ترکیب ۳ یا تعداد بیشتر از رنگ‌های اولیه می‌تواند یک رنگ جدید بدست آورد. اگر او در رنگ‌آمیزی تابلوی نقاشی خود ۳ رنگ از رنگ‌های جدید ایجاد شده را

استفاده کند، به چند طریق می‌تواند رنگ‌های خود را انتخاب کند؟

(۱) ۱۲۶۴۰      (۲) ۱۵۶۰۰

(۳) ۱۱۴۸۰      (۴) ۱۰۶۰۰

**تست ۴۶:** اگر در یک گیسه ۳ مهره زرد، ۵ مهره سبز داشته باشیم و بخواهیم ۴ مهره به تصادف

انتخاب کنیم، تعداد حالات ممکن برای آن که حداقل یک مهره زرد و دقیقاً یک مهره سبز انتخاب شوند،

کدام است؟

(۱) ۱۴۰      (۲) ۱۲۵

(۳) ۷۵      (۴) ۱۰۵

**تست ۴۷:** از بین ۷ نفر ۵ نفر را انتخاب می‌کنیم. به چند طریق این انتخاب صورت می‌گیرد به شرطی که دو فرد مشخصی با هم انتخاب نشوند؟

(۱) ۲۰      (۲) ۲۱      (۳) ۱۱      (۴) ۱۰

**تست ۴۸:**

یک آشپز هشت نوع آدویه دارد. او با استفاده از هر سه تا از این آدویه‌ها، یک طعم مخصوص درست

می‌کند. اگر بدانیم که دو نوع آدویه هستند که با هم نمی‌توانند استقاده شوند، تعداد طعم‌هایی که او

می‌تواند درست کند، چند تاست؟

(۱) ۲۰      (۲) ۴۰      (۳) ۵۰      (۴) ۷۰

**تست ۴۹:**

از میان ۵ مرد و ۳ زن، به چند روش می‌توان یک گروه آموزشی پنج نفره تشکیل داد، به شرطی که در

گروه، حتmeno زن حضور داشته باشد؟

(۱) ۵۶      (۲) ۵۵      (۳) ۵۰      (۴) ۴۵

**تست ۵۰:**

از میان ۸ دبیر ریاضی، ۴ دبیر فیزیک و ۲ دبیر شیمی یک گمینه‌ی ڈانفری تشکیل دهیم که حداقل نیمی از دبیران ریاضی انتخاب شوند. این عمل به چند طریق صورت می‌گیرد؟

(۱) ۴۲۰      (۲) ۴۵۶      (۳) ۴۷۶      (۴) ۵۶

**دانلود از سایت ریاضی سرا**

**تست۱:** سکه‌ای را ۱۰ بار پرتاپ می‌کنیم. به چند طریق حداقل در ۲ پرتاپ «رو» ظاهر می‌شود؟

۱۰۱۴ (۴)

۱۰۱۳ (۳)

۱۰۱۲ (۲)

۱۰۱۱ (۱)



- از هریک از ۵ قارهٔ جهان، ۵ کشور داوطلب شرکت در فعالیتی بین‌المللی هستند. به چند طریق می‌توان از بین آن‌ها، ۳ کشور را انتخاب کرد، به‌طوری که آن ۳ کشور از ۳ قارهٔ مختلف باشند؟

۷۵۰۰ (۴)

۳۷۵۰ (۳)

۲۵۰۰ (۲)

۱۲۵۰ (۱)

**تست۲:**

**نکته:** در بعضی مسائل ترکیبی از جایشگت و ترکیب را داریم.



**تست۳:** با حروف کلمه computer چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حتماً r, u بکار رفته باشد؟

۲۴۰۰ (۴)

۱۲۰۰ (۳)

۶۰۰ (۲)

۳۶۰ (۱)



**تست۴:** به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از بین ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از بین ۶ کتاب سال دوم را یکی در میان کنار هم چید؟

$$\binom{5}{3} \binom{6}{4} 4! 3! \times 2$$

$$\binom{5}{3} \binom{6}{4} 4! 3!$$

$$\binom{11}{7} 4! 3! \times 2$$

$$\binom{11}{7} 4! 3!$$



**تست۵:** به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از بین ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از بین ۶ کتاب سال دوم کنار هم چید به طوری که کتاب‌های سال

اول کنار هم و کتاب‌های سال دوم کنار هم باشند؟

$$\binom{5}{3} \binom{6}{4} 4! 3! \times 2$$

$$\binom{5}{3} \binom{6}{4} 4! 3!$$

$$\binom{11}{7} 4! 3! \times 2$$

$$\binom{11}{7} 4! 3!$$



**تست۶:** تعداد جایشگت‌های ۹ حرفی که با حروف AAAABBCCC می‌توان نوشت که در آن‌ها هیچ دو حرف A کنار هم نباشد کدام

$$\binom{6}{4} \frac{5!}{2! 3!}$$

$$\binom{6}{4} \frac{4! 5!}{2! 3!}$$

$$\binom{5}{4} 3! 4! 5!$$

$$\binom{6}{4} 3! 4! 5!$$



است؟ (۱)

**تست ۵:** ۵ توپ قرمز یکسان و ۳ توپ آبی متفاوت را به چند طریق می‌توان کنار هم چید بهطوری که هیچ کدام از توپ‌های آبی کنار هم نباشند؟

(۱) ۲۰ ۳۰ ۴۰ ۱۲۰



**تست ۶:** با حروف کلمه RANGIN چند کلمه سه حرفی می‌توان ساخت؟

۹۶ (۴) ۸۴ (۳) ۷۲ (۲) ۶۰ (۱)



**تست ۷:** ۵ حرف از ۸ حرف کلمه BUSINESS را کنار هم چیده‌ایم، در چند مورد سه حرف S حضور دارند؟

۲۴۰ (۴) ۲۰۰ (۳) ۱۶۰ (۲) ۱۵۰ (۱)



**تست ۸:** از هر یک از مدارس E, D, C, B, A و چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز

(تجربی ۹۲) که دو به دو غیر هم مدرسه باشند را انتخاب کرد؟



**تست ۹:** ۶ نفر به نامهای a, b, c, d, e, f را به چند طریق می‌توان در یک صفحه قرار داد بهطوری که a و b بعد از

c و d در صفحه قرار بگیرند (a و b الزاماً بلا فاصله بعد از e و f نیستند).

۲۴۰ (۲) ۲۶۰ (۱)

۱۸۰ (۴) ۱۲۰ (۳)

**تست ۱۰:** - با حروف کلمه "logarithm" و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت که شامل دو حرف "a" و "r" بوده و بین این دو حرف دقیقاً یک حرف قرار داشته باشد؟

(۱) ۱۵! ۱۴×۱۵×۵! ۱۵×۳!×۵! ۷×۳!×۵!



**تست ۱۱:** به چند طریق می‌توان از بین ۴ جفت کفش: الف) ۳ لنگه کفش انتخاب کنیم؟ ب) ۳ لنگه کفش که دو تا جفت باشند انتخاب کنیم؟



دانلود از سایت ریاضی سرا

تست ۶۳: با اعداد مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که رقم صدگان آن بزرگ‌ترین رقم باشد؟

۱۷ (۴)

۲۰ (۳)

۱۶ (۲)

۱۰ (۱)



## احتمال:



الف. پیده‌ی تصادفی: به یک پدیده طبیعی یا آزمایشی که نتیجه‌ی آن از قبل مشخص نباشد، پیده‌ی تصادفی گوییم.

ب. فضای نمونه‌ی: به تعداد کل حالت‌هایی که برای یک پدیده تصادفی معکن است رخ دهد، فضای نمونه‌ی می‌گوییم و آن را با حرف  $\Omega$  نشان می‌هیم.

مثال ۹: فضای نمونه‌ای پرتاپ دو سکه را بنویسید.

مثال ۱۰: فضای نمونه‌ای پرتاپ سه سکه را بنویسید.

مثال ۱۱: فضای نمونه‌ای پرتاپ دو سکه و یک تاس چند عضو دارد؟

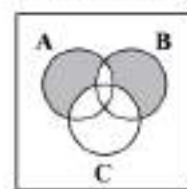
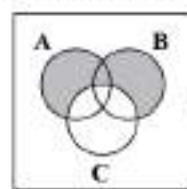
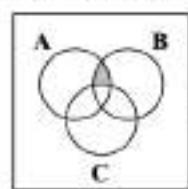
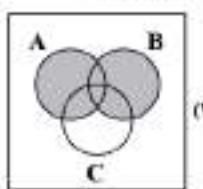
مثال ۱۲: فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با ۴ فرزند چند عضو دارد؟

مثال ۱۳: فضای نمونه‌ای پرتاپ ۳ سکه و ۲ تاس چند عضو دارد؟

پ. پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه‌ی از یک فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی را پیشامد تصادفی می‌گوییم.



تست ۶۴: فرض کنید  $A$ ,  $B$  و  $C$  سه پیشامد از فضای نمونه  $S$  باشند. پیشامد آنکه  $A$  و  $B$  و  $C$  رخ دهد، ولی  $C$  رخ ندهد کدام است؟



مثال ۱۴: تمام اعداد دو رقمی که می‌توان با ارقام ۰ و ۱ و ۴ و ۷ را روی کارت‌های مجزا می‌نویسیم. یک کارت را به تصادف خارج می‌کنیم.  
الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید. ب) پیشامد آن که عدد کمتر از ۴ باشد را بنویسد. پ) پیشامد اول بودن عدد را بنویسید.

(()) همه چیز بسیار آسان است تنها زمانی کاری سخت هیشود که شما از انجام آن اکراه دارید. (())



ت. **تعریف احتمال:** احتمال وقوع پیشامد  $A$  را با  $P(A)$  نشان می‌دهیم. این احتمال از تقسیم تعداد حالات ممکن وقوع این پیشامد بر تعداد کل اعضای فضای نمونه حاصل می‌شود.

### مثال‌ها: دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بباید که:

الف) یکی از اعداد رو شده دو برابر دیگری باشد.

ب) مجموع اعداد رو شده برابر ۶ باشد.

پ) مجموع اعداد رو شده بر سه بخش‌پذیر باشد.

### مثال ۲۷: کیسه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید، ۶ مهره‌ی سبز و ۵ مهره‌ی قرمز است. ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن را بباید که:

ب) دقیقاً دو مهره سفید باشند.

الف) هر سه همنگ باشند.

پ) دقیقاً دو مهره همنگ باشند.

ث) حداقل دو تا سبز باشد.

### مسئله ۱: - از میان ۶ جفت جوراب متمایز، دو لنگه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این دو لنگه جفت یکدیگر باشند کدام است؟

$$\frac{1}{11} \quad (4)$$

$$\frac{3}{11} \quad (3)$$

$$\frac{1}{13} \quad (2)$$

$$\frac{1}{7} \quad (1)$$



### مسئله ۲: - به تصادف یک عدد از بین اعداد زوج طبیعی کمتر از ۲۵ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد نه مضرب ۳ باشد و نه مضرب ۴، کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{7}{12} \quad (2)$$

$$\frac{5}{22} \quad (1)$$



**تست ۷۷:** احتمال آنکه در یک خانواده با ۴ فرزند، فرزند اول و آخر دارای یک جنسیت باشند کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۱)$$



**تست ۷۸:** در پرتاب دو تاس، احتمال آنکه مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند کدام است؟

$$\frac{5}{18} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{18} \quad (۱)$$



**تست ۷۹:** با ارقام ۲، ۳، ۵، ۶، ۷، ۹ یک عدد چهار رقمی کمتر از ۶۰۰۰ و بدون تکرار ارقام ساخته ایم. احتمال آن که این عدد زوج باشد، کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$



**تست ۷۰:** در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است، اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شود، با کدام احتمال، لااقل بر روی یکی از آن دو آزمون انجام شده است؟

تجربی ۸۵

$$\frac{16}{21} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{10}{21} \quad (۱)$$



**تست ۷۱:** در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگه داری می شوند. اگر به طور تصادفی ۲ موش از بین آنها جهت آزمایش برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش «سفید» است؟

تجربی ۸۶

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{7} \quad (۱)$$



**تست ۷۲:** دو تاس را با هم پرتاب می کنیم، با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

تجربی ۹۲

$$\frac{5}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{18} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۱)$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

در گیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی بی در بین بدون جای گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متالیا خارج نمی‌شوند؟

(۴)  $\frac{5}{25}$  (۳)  $\frac{4}{24}$ (۲)  $\frac{15}{45}$  (۱)  $\frac{5}{15}$ تست: ۷۳  
۹۲ تجربی

هر یک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است، به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟

(۴)  $\frac{6}{6}$  (۳)  $\frac{5}{5}$  (۲)  $\frac{4}{4}$  (۱)  $\frac{2}{2}$ تست: ۷۴  
۹۵ تجربی

چهار رقم ۳، ۲، ۱، ۰، را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶، حاصل می‌شود؟

(۴)  $\frac{5}{9}$  (۳)  $\frac{4}{9}$  (۲)  $\frac{5}{12}$  (۱)  $\frac{1}{3}$ تست: ۷۵  
۹۶ تجربی خارج

در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۱)  $\frac{1}{12}$ تست: ۷۶  
۹۱ تجربی خارج

در طرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده همزنگانند؟

(۴)  $\frac{5}{14}$  (۳)  $\frac{2}{9}$  (۲)  $\frac{3}{14}$  (۱)  $\frac{1}{6}$ تست: ۷۷  
۹۲ تجربی خارج

در جعبه‌ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید، خارج شده است؟

(۴)  $\frac{55}{143}$  (۳)  $\frac{45}{143}$  (۲)  $\frac{25}{77}$  (۱)  $\frac{35}{91}$ تست: ۷۸  
۹۴ تجربی خارج

((بهترین زمان برای تربیت اراده، ایام جوانی است.))

دو تاس را با هم می اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوازن هستند؟

$$\frac{4}{9}(4)$$

$$\frac{7}{18}(3)$$

$$\frac{5}{18}(2)$$

$$\frac{2}{9}(1)$$

تست: ۷۹  
تجربی خارج ۹۵



در یک تیم ۷ نفره، احتمال آن که فقط روز تولد دو نفر از آنها در هفته یکی باشد، کدام است؟

$$\frac{\binom{7}{2} \times 6!}{7^7}(4)$$

$$\frac{\binom{7}{2} \times 6!}{7^7}(3)$$

$$\frac{\binom{7}{2} \times 5!}{7^7}(2)$$

$$\frac{\binom{7}{2} \times 6!}{7^6}(1)$$

تست: ۸۰  
کلید

- تمام اعداد سه رقمی زوج را روی تعدادی کارت نوشته ایم (هر عدد روی یک کارت). کارتی را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه همه ارقام عدد روی این کارت زوج باشد، کدام است؟

$$\frac{5}{18}(4)$$

$$\frac{2}{9}(3)$$

$$\frac{1}{10}(2)$$

$$\frac{1}{20}(1)$$

کلید

- خانواده‌ای دارای ۵ فرزند به نام‌های «آزاده»، «علی»، «ایمان»، «نرگس» و «امین» است. می‌دانیم ایمان از علی بزرگ‌تر است. احتمال آنکه علی کوچک‌ترین فرزند خانواده باشد، کدام است؟

$$\frac{25}{48}(4)$$

$$\frac{5}{12}(3)$$

$$\frac{2}{5}(2)$$

$$\frac{1}{4}(1)$$

کلید

- در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و تعدادی مهره قرمز وجود دارد. از این جعبه ۲ مهره به تصادف و با هم خارج می‌کنیم؛ احتمال آنکه حداقل یکی از مهره‌ها آبی باشد، برابر  $\frac{6}{7}$  است. اگر از این جعبه ۱ مهره خارج کنیم، چقدر احتمال دارد، این مهره آبی باشد؟

$$\frac{1}{2}(4)$$

$$\frac{4}{7}(3)$$

$$\frac{3}{7}(2)$$

$$\frac{2}{3}(1)$$

کلید



B A

S

B A

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A'

A

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

A

$$P(S) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

**مثال ۸۷:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند و احتمال باشیم  $P(A) = \frac{1}{5}$  و  $P(B) = \frac{1}{3}$  باشند، احتمال وقوع لاقل یکی از آن‌ها رخ دهد برابر  $\frac{3}{4}$  باشد، احتمال وقوع همزمان هر دو را بباید.

**تست ۸۴:** در یک عدد سه رقمی بدون صفر، احتمال این‌که لاقل دو رقم یکسان باشند، کدام است؟

$$\frac{49}{81} (۴)$$

$$\frac{17}{36} (۵)$$

$$\frac{11}{27} (۶)$$

$$\frac{25}{81} (۷)$$

در جعبه‌ای ۳ مهره سفید ۲ مهره سیاه ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند؟

تجربی ۹۴

$$\frac{22}{45} (۴)$$

$$\frac{21}{45} (۵)$$

$$\frac{29}{45} (۶)$$

$$\frac{28}{45} (۷)$$

در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از میان آنها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لاقل یکی از موش‌ها

سفید است؟

تجربی خارج ۹۱

$$\frac{29}{44} (۵)$$

$$\frac{28}{44} (۶)$$

$$\frac{9}{11} (۷)$$

$$\frac{8}{11} (۸)$$

در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز، ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره آبی، خارج می‌شود؟

تجربی خارج ۹۲

$$\frac{73}{84} (۴)$$

$$\frac{67}{84} (۵)$$

$$\frac{37}{42} (۶)$$

$$\frac{31}{42} (۷)$$

در جعبه‌ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

تجربی خارج ۹۶

$$\frac{9}{14} (۴)$$

$$\frac{10}{21} (۵)$$

$$\frac{17}{42} (۶)$$

$$\frac{8}{21} (۷)$$

نکته: احتمال آن‌که در یک خانواده  $n$  نفری،  $k$  فرزند پسر(دختر) باشند برابر  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$  است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

(( اهم علی (ع): هر که بر خدا توکل کند، دشواری‌ها برایش آسان شده و اسباب برایش فراهم گردد. ))

**مثال ۱۸:** در یک خانواده با چهار فرزند احتمال آن را بباید که:

- ب) حداقل سه پسر باشند.
- الف) دقیقاً سه پسر باشند.
- پ) دو پسر و دو دختر داشته باشد.
- ت) تعداد دختران بیشتر باشد.
- ج) فقط دو فرزند اول پسر باشند.
- ث) دو فرزند اول پسر باشند.

- در یک خانواده ۴ فرزندی با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4) \qquad \frac{5}{8} \quad (3) \qquad \frac{9}{16} \quad (2) \qquad \frac{3}{8} \quad (1)$$

**مسئله ۸۹:**

تجربی



S B A

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = 0 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$$

S B A

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

B' A', B, A B A

- در پرتاب یک تاس اگر A بیشامد «رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۴» باشد، آنگاه بیشامد B را کدام گزینه در نظر بگیریم تا A و B دو بیشامد ناسازگار باشند؟

- ۳) رو شدن عدد کوچک‌تر از ۵
- ۴) رو شدن عدد مضرب ۳
- ۲) رو شدن عدد اول
- ۱) رو شدن عدد زوج

**مسئله ۹۰:**

کمک

اگر A و B دو بیشامد مستقل باشند و  $P(A) = \frac{1}{4}$  و  $P(B) = \frac{1}{3}$ ، حاصل  $P(A \cup B)$  کدام است؟

$$\frac{7}{12} \quad (4) \qquad \frac{6}{12} \quad (3) \qquad \frac{5}{12} \quad (2) \qquad \frac{4}{12} \quad (1)$$

**مسئله ۹۱:**

کمک

**تست ۹۷:** اگر A و B دو پیشامد مستقل ناتهی باشند و  $P(A \cap B) = [P(A)]^2$  باشد، آن‌گاه P(A') کدام است؟

(A)  $P(A) \times P(B)$

(B)  $P(A)$

(C)  $1 - P(B)$

(D)  $1 - P(A) \times P(B)$

**تست ۹۸:** اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند و داشته باشند  $P(B') = \frac{5}{9}$  و  $P(A) = \frac{1}{3}$ ، آن‌گاه P(A ∪ B) کدام است؟

(A)  $\frac{1}{9}$

(B)  $\frac{2}{3}$

(C)  $\frac{1}{4}$

(D)  $\frac{3}{4}$

**تست ۹۹:** اگر A و B مستقل باشند، آن‌گاه  $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ ،  $P(A) = \frac{1}{2}$ . P(B) کدام است؟

(A)  $\frac{5}{6}$

(B)  $\frac{2}{3}$

(C)  $\frac{1}{2}$

(D) 0

**تست ۱۰۰:** اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم و  $P(B) = 2P(A)$  باشد، آن‌گاه P(B) کدام است؟

(A)  $\frac{5}{4}$

(B)  $\frac{5}{2}$

(C)  $\frac{1}{2}$

(D) 0

**تست ۱۰۱:** اگر A و B مستقل باشند، آن‌گاه دو پیشامد A و B نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

(A) مستقل

(B) مستم

(C)  $A \subset B$ 

(D) ناسازگار

**تست ۱۰۲:** در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ نفر مصدق آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ نفر مصدق از آنان مهارت قالی‌باشی دارند، اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌باشی دارد؟

(A) ۰/۸۵

(B) ۰/۸

(C) ۰/۷۵

(D) ۰/۷

**تست ۱۰۳:** دو تا اس ساقم را با هم برتایب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد روشده زوج باشند، با کدام احتمال حداقل حدادهتر در سه برتایب نتیجه حاصل می‌شود؟

(A)  $\frac{29}{64}$

(B)  $\frac{13}{16}$

(C)  $\frac{37}{64}$

(D)  $\frac{37}{64}$

(E)  $\frac{27}{64}$

دانلود از سایت ریاضی سرا  
تجربی ۹۱

- تست ۹۹: احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر  $\frac{5}{9}$  و برای شخص B برابر  $\frac{8}{9}$  است. با کدام احتمال، لاقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟
- تجربی ۹۵
- |                  |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\frac{۰/۹۸}{۴}$ | $\frac{۰/۹۶}{۳}$ | $\frac{۰/۹۴}{۲}$ | $\frac{۰/۹۲}{۱}$ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|

$$\frac{۵۵}{۹۶} \quad (۴)$$

$$\frac{۲۲}{۴۸} \quad (۳)$$

$$\frac{۴۱}{۹۶} \quad (۲)$$

$$\frac{۱۹}{۴۸} \quad (۱)$$

تجربی خارج ۹۲

چهار دانش‌آموز یک کلاس بر یک نیمکت نشسته‌اند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

تست ۱۰۰: احمد به احتمال  $\frac{۷}{۲۰}$  در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال  $\frac{۸}{۲۰}$  در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

- الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.
- ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.
- پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب نشود.
- ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.
- ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.



نکته: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ی  $S$  باشند احتمال وقوع اینکه  $A$  اتفاق بیافتد و  $B$  اتفاق نیافتد از رابطه زیر محاسبه می‌شود:



$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

تست ۱۰۱: احتمال این‌که شخصی گروه خونی O داشته باشد،  $۵۶$  درصد و احتمال این‌که اخلاقه وزن داشته باشد،  $۶۰$  درصد است. با کدام احتمال شخص گروه خونی O دارد

ولی اخلاقه وزن ندارد؟



(۱)  $۲۵$  درصد

(۲)  $۳۹$  درصد

(۳)  $۴۰$  درصد

تست ۱۰۲: - احمد به احتمال  $\frac{۱}{۱۰}$  در تیم والیبال مدرسه و به احتمال  $\frac{۷}{۲۰}$  در گروه سرود مدرسه انتخاب می‌شود. احتمال آنکه فقط در گروه سرود مدرسه انتخاب شود،

چقدر است؟



(۱)  $۰/۱۸$

(۲)  $۰/۴۲$

(۳)  $۰/۲۸$

(۴)  $۰/۵۸$

**ح. احتمال شرطی:**

اگر و دو پیشامد از فضای نمونه باشند)، در این صورت احتمال وقوع به شرطی که بدانیم پیشامد نیز رخداده است از رابطه مقابل محاسبه می‌شود

**نتیجه:**

$$\text{مثال ۲۰:} \text{ اگر } P(A|B) = \frac{1}{3} \text{ و } P(A \cap B) = \frac{1}{5} \text{ باشد، } P(B) \text{ را بیابید.}$$



$$\text{مسئله ۲۱:} \text{ اگر } P(A|B') = \frac{1}{4} \text{ و } P(B) = \frac{1}{3} \text{ و } P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{ کدام است؟}$$



$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\text{مسئله ۲۲:} \text{ اگر } A \text{ و } B \text{ دو پیشامد مستقل از فضای نمونه } S \text{ باشند، حاصل } P((A - B) | A) \text{ کدام است؟}$$

$$1 - P(B)$$

$$1 - P(A)$$

$$P(B)$$

$$P(A)$$



**مثال ۲۳:** فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلیترین رقیبیش را ببرد  $\frac{1}{4}$  باشد. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر  $\frac{1}{6}$  و در صورتی

که اصلی‌ترین رقیبیش را ببرد، این احتمال به  $\frac{1}{3}$  افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاق «قهرمانان شدن» یا بردن اصلیترین رقیب «برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟



**مثال ۲۲:** ترکیبی از ۴ ماده شبیهای داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A،  $\frac{1}{5}$  و احتمال واکنش نشان دادن ماده B،  $\frac{1}{7}$  است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B،  $\frac{1}{3}$  خواهد شد. با جه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

**مثال ۲۳:** کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سبز است. دو مهره پشت سر هم و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر بدانیم مهره اول

سفید است، احتمال سبز بودن مهره دیگر را بیابید.

**مثال ۲۴:** کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سبز است. سه مهره پشت سر هم و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر بدانیم مهره اول

سفید است، الف) احتمال سبز بودن دو مهره دیگر ب) احتمال سفید بودن دو مهره دیگر را بیابید.

**مسئله ۱۰:** از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. سه کارت دوم را خارج می‌کنیم.  
با گذاشتن هر دو کارت همزنگ هستند؟

تمرین ۹۱

$$\frac{9}{7}$$

$$\frac{2}{7}$$

$$\frac{5}{14}$$

$$\frac{2}{7}$$

**مسئله ۱۰۶:** در گیسه‌ای ۴ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف و یکی در پی و بدون جایگذاری از این گیسه خارج می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ (تمرین کتاب درس)

$$\frac{3}{14}$$

$$\frac{1}{21}$$

$$\frac{1}{14}$$

$$\frac{1}{7}$$

**مسئله ۱۰۷:** در یک مسابقه اتومبیل رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر  $75/0$  است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی شود، برابر  $10/0$  است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان می‌رسد؟

$$\frac{7}{17}$$

$$\frac{14}{17}$$

$$\frac{15}{17}$$

$$\frac{16}{17}$$

تست ۱۰۸:

- یک تیم فوتبال در یک بازی فینال که به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود، حضور دارد. احتمال اینکه این تیم بازی رفت را از حریف خود ببرد، ۲۰ درصد است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر برابر ۳۰ درصد است و در صورت برنده شدن در بازی رفت این احتمال به ۵۰ درصد افزایش می‌یابد. احتمال اینکه تیم مورد نظر نه بازی رفت را ببرد و نه قهرمان شود، چقدر است؟

۰/۶ (۴) ۰/۵۶ (۳) ۰/۴۲ (۲) ۰/۴ (۱)



تست ۱۰۹:

- در یک مسابقه اتومبیلرانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۹ و احتمال اینکه به خط پایان برسد به شرط آنکه دچار نقص فنی بشود، برابر ۰/۰ است. اگر احتمال اینکه اتومبیل به خط پایان نرسد، برابر ۰/۲ باشد، چقدر احتمال دارد این اتومبیل دچار نقص فنی بشود، به شرط آنکه به خط پایان نرسد؟

۰/۰۷ (۱) ۰/۳۵ (۲) ۰/۷۷ (۳) ۰/۰۳۷۵ (۴)



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

در پرتاپ ۲ تاس سالم به صورت همزمان، اگر مجموع دو عدد رو شده کمتر از ۶ باشد، احتمال اینکه هر دو عدد زوج باشند کدام است؟

۰/۱۵ (۲) ۰/۱ (۱) ۰/۲۵ (۴) ۰/۲ (۳)



تست ۱۱۰:

اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند و  $P(A) = ۰/۳$  و  $P(B) = ۰/۲$  باشند،  $P(A|B)$  را بایايد.



دانلود از سایت ریاضی سرا

((اهم اعلی)) توهک بر خداوند، هایه نجات از هر بدی و محفوظ بودن از هر دشمنی است. ((

مثال ۲۳: در یک خانواده سه فرزندی احتمال دختر بودن فرزند سوم یک خانواده چیست، در صورتی که بدانیم دو فرزند اول پسرند؟



در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟

مسئله ۱۱۱:

تجربی خارج

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (4)$$



یک خانواده سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد؟ در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است.

مسئله ۱۱۲:

تجربی خارج

$$\frac{3}{8} \quad (1) \quad \frac{5}{8} \quad (2) \quad \frac{3}{7} \quad (3) \quad \frac{4}{7} \quad (4)$$



دو یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

مسئله ۱۱۳:

تجربی خارج

$$\frac{3}{8} \quad (1) \quad \frac{5}{8} \quad (2) \quad \frac{3}{7} \quad (3) \quad \frac{4}{7} \quad (4)$$



از بین سه گارت سبز و ۴ گارت سبز یکسان به تمادف یک گارت بدون چائنازی بیرون می‌آوریم، سپس گارت دوم را خارج

مسئله ۱۱۴:

تجربی

$$\frac{2}{7} \quad (1) \quad \frac{5}{14} \quad (2) \quad \frac{3}{7} \quad (3) \quad \frac{4}{7} \quad (4)$$



- تاسی را ۴ بار به طور متوالی پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب‌های اول و دوم برابر ۸ باشد، احتمال آنکه مجموع اعداد

ظاهر شده در پرتاب‌های سوم و چهارم برابر ۶ باشد، چقدر است؟

مسئله ها:

تجربی

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{9} \quad (2) \quad \frac{5}{36} \quad (3) \quad \frac{21}{216} \quad (4)$$



دانلود از سایت ریاضی سرا



نکته: اگه در مساله‌ای به احتمال به وقوع پیوستن یک پیشامد توجه نشود، بدون توجه به آن مساله را حل می‌کنیم.

## تست ۱۷۶:

- در جعیه‌ای ۶ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه موجود است. دو مهره متواالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره‌ی خارج شده سفید است؟

$$\frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{9}{14}$$

تجربی ۹۲

## تست ۱۷۷:

- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متواالیاً سه موش را از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش، سفید و سومین موش، سیاه است؟

$$\frac{15}{56}$$

$$\frac{12}{56}$$

$$\frac{17}{56}$$

$$\frac{11}{56}$$

تجربی ۸۸

معادله خط:



**الف) معادله گسترده:** معادله گسترده خط به صورت  $ax + by + c = 0$  است. در این حالت شیب خط از

رابطه  $m = -\frac{a}{b}$  و عرض از مبدأ خط از رابطه  $c = -\frac{c}{b}$  بدست می‌آید.

**الف) معادله استاندارد:** معادله استاندارد خط به صورت  $y = mx + b$  است که در آن  $m$  شیب خط و  $b$  عرض از مبدأ آن را نشان می‌دهد. خطهای  $x = a$  خطهای عمودی با شیب تعریف نشده و خطهای  $y = a$  افقی با شیب صفر هستند.

**مثال:** شیب و عرض از مبدأ خطهای زیر را بیابید و سپس آنها را رسم کنید.

$$4x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow 2y = 4x - 2$$

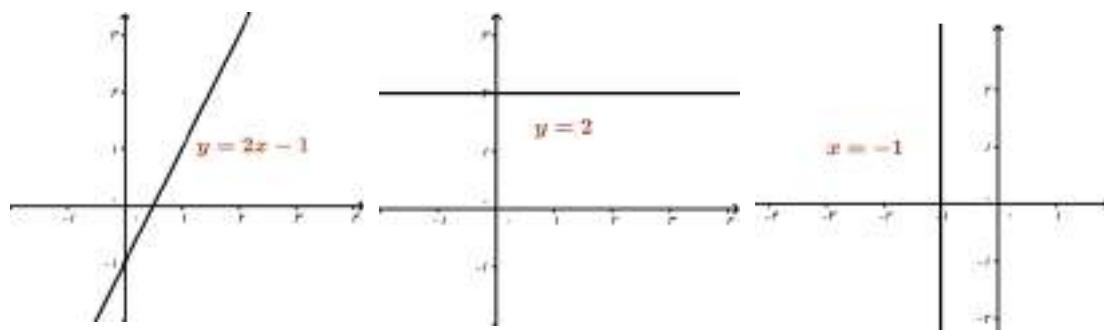
$$y = 2x - 1$$

$$x = -1$$

$$\Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \infty \\ b = \infty \end{cases}$$



**نکته:** اگر  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  دو نقطه از خط باشند، شیب خط از رابطه  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  بدست می‌آید.

**نکته:** معادله خطی که از دو نقطه  $B = (x_2, y_2)$  و  $A = (x_1, y_1)$  می‌گذرد به صورت

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**نکته:** هر دو خط موازی، شیب برابر دارند و هر دو خط عمود، شیب‌شان عکس و قرینه یکدیگر است. اگر این دو حالت اتفاق نیافتد، دو خط متقاطع خواهند بود.

**مثال:** معادله خطی را بیابید که از  $A(2, 0)$  بگذرد و بر خط  $2y = 3x - 1$  عمود باشد.

$$2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow m' = -\frac{2}{3} \xrightarrow{A(2, 0)} y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 2)$$

((حضرت علی(ع): عادت بد، دشمنی است که با قدرت بر صاحبیش حکومت می‌کند. ))

تست ۱: اگر دو خط  $1: 2y - 3x = 5$  و  $2: y = mx + 5$  با هم موازی باشند، مقدار  $m$  کدام است؟

-۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

$\frac{2}{3}$  (۱)



-۲ (۴)

-۱ (۳)

۰ (۲)

۱ (۱)



-۳ (۴)

۰ (۳)

۱ (۱)

-۳ (۴)

۰ (۳)

۱ (۱)



۷/۵ (۴)

۸ (۳)

۶/۵ (۲)

۱۱ (۱)



۷/۵ (۴)

۸ (۳)

۱۱ (۱)

۷/۵ (۴)

۸ (۳)

۱۱ (۱)



به ازای کدام مقادیر  $a$ ، نقاط (۱, ۳) و (۱, ۴a+۱) و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

$2, -\frac{9}{4}$  (۴)

$2, -\frac{3}{4}$  (۳)

$-2, \frac{3}{4}$  (۲)

$-2, \frac{9}{4}$  (۱) تجربی خارج (۸۵)



تست ۴: اگر سه نقطه متمایز (۱, ۴)، A(۴, ۱)، B(a+۱, ۲a-۲) و C(a+۳, ۲a-۵) در یک امتداد باشند، مقدار a کدام است؟

$\frac{17}{4}$  (۴)

$\frac{16}{4}$  (۳)

$\frac{15}{4}$  (۲)

۲ (۱)



تست ۵: اگر خط  $4: y = nx + ۴$  بر دو خط  $1: y = (m - \Delta)x + ۷$  و  $2: y = (m - \Delta)x + ۱$  عمود باشد، حاصل  $m - \Delta$  کدام است؟

۴ صفر

۷ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)



تست: ۷

عرض از مبدأ خط گذرا بر نقطه  $(-1, -5)$  و عمود بر خط  $y = 2x + 1$  کدام است؟

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

(انسانی ۹۵)

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، خط به معادله  $y = mx + m - 3$  از ناحیه دوم محورهای مختصات، نمی‌گذرد؟

۴) هیچ مقدار

۳ (۳)

۱ (۲)

۰ ≤  $m \leq 3$  (۱)

تست: ۸

(انسانی ۹۴)

خط گذرنده از دو نقطه  $(2, 5)$  و  $(-1, 3)$ ، خط به معادله  $y + x + 3 = 0$  را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست: ۹

(انسانی ۹۲)

فاصله نقطه  $A(1, 0)$  از نقطه تلاقی دو خط به معادلات  $y = 2x + 3$  و  $y = x + 0$  کدام است؟۲ $\sqrt{2}$  (د)

۵ (ج)

۲ (ب)

 $\sqrt{2}$  (الف)

تست: ۱۰

(انسانی ۸۳)

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، خط به معادله  $y = (m-1)x + 2 - m$  از ناحیه اول محورهای مختصات،

نمی‌گذرد؟ (انسانی خارج ۹۴)

۴) هیچ مقدار

۳ (۳) هر مقدار

۲ (۲)  $1 < m < 2$ ۱ (۱)  $m > 1$ 

تست: ۱۱



### طول پاره خط و نقطه وسط آن:

الف) فاصله دو نقطه  $A(x_1, y_1), A(x_2, y_2)$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نکته: اگر دو نقطه هم عرض باشند، فاصله آنها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

نکته: اگر دو نقطه هم طول باشند، فاصله آنها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$

ب) نقطه وسط دو نقطه  $A(x_1, y_1), A(x_2, y_2)$  از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

مثال:

فاصله دو نقطه  $B = (-2, 4)$ ,  $A = (1, 0)$  و همچنین نقطه وسط آنها را بیابید.



تسهیت ۱۲: اگر دو نقطه  $B = (2m+n-3, m+n+4)$  و  $A = (m-4n, m-n)$  به ترتیب روی قسمت مثبت محور x ها و y ها

باشند، طول پاره خط AB کدام است؟

۵ (۳)

$2\sqrt{2}$  (۲)

۲ (۱)

کدام است؟



تسهیت ۱۳:

در شکل مقابل داریم:  $MN + MP = 22$ . انداره پاره خط NP کدام است؟

۶ (۱)

۵ (۲)

۴ (۳)

۳ (۴)



تسهیت ۱۴:

قرینة نقطه  $(a-1, b-5)$  نسبت به نقطه  $M(-1, 4)$ , نقطه  $B(2b+5, 2a+1)$  می‌باشد. ab کدام است؟

-۸+ (۴)

۸+ (۳)

-۴+ (۲)

۴+ (۱)



**تست ۱۶:** در مثلثی با رئوس  $A(2,5)$ ,  $B(3,7)$  و  $C(-1,5)$  معادله میانه وارد بر ضلع  $BC$  کدام است؟

$$x + 2y = 12 \quad (4)$$

$$y - x = 3 \quad (3)$$

$$x + y = 7 \quad (2)$$

$$2x + y = 9 \quad (1)$$



**تست ۱۷:** نقاط  $A(7,5)$  و  $C(3,9)$  دو رأس مقابل یک مربع هستند. محیط این مربع چقدر است؟

$$24 \quad (4)$$

$$4\sqrt{10} \quad (3)$$

$$20 \quad (2)$$

$$16 \quad (1)$$



**تست ۱۸:** اگر نقاط  $A(2,1)$ ,  $B(4,-2)$ ,  $C(6,5)$  و  $D(a,b)$  مختصات رئوس متوازی الاضلاع  $ABCD$  باشند، حاصل  $ab$  کدام است؟

$$4 \text{ صفر}$$

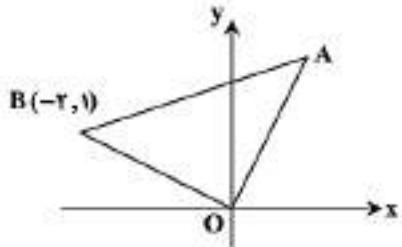
$$36 \quad (3)$$

$$24 \quad (2)$$

$$108 \quad (1)$$



**تست ۱۹:** نقطه  $A$  در ناحیه اول دستگاه مختصات و روی خط  $y = 2x$  قرار دارد. اگر مثلث  $OAB$  در رأس  $O$  متساوی الساقین باشد، عرض نقطه  $A$  چقدر است؟



$$\frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

**مسئل ۲:** مثلث  $ABC$  با راس‌های  $C = (-3, 1)$ ,  $B = (2, -2)$ ,  $A = (0, 2)$  را در نظر بگیرید. طول و معادله میانه‌ی وارد بر ضلع  $BC$

و محیط مثلث را بیابید.



- چهارضلعی ABCD یک لوزی است که در آن مختصات رأس A $(3, -3)$  است و قطر BC روی خط  $y = 2x + 1$  قرار دارد. مختصات نقطه D کدام است؟

(۲) (-۴, ۳)

(۳) (-۳, ۵)

(۴) (-۵, ۱)

تست ۱۹:



## فاصله نقطه از خط:



فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  بحسب رابطه

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله خط  $ax + by + c = 0$  از مبدأ مختصات، از رابطه

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  بحسب رابطه

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تست ۲۰: فاصله خطوط  $1 = 4x - y$  و  $2 = 3x - 2y$  از نقطه  $A(1, -2)$  و از مبدأ مختصات بباید.

تست ۲۰:



۱)  $y = 2x + 11$  و  $y = 2x - 4$  از یکدیگر چند برابر  $\sqrt{5}$  است؟

۲) (۳)

۲) (۲)

۱) (۱)



تست ۲۱: دو ضلع یک مربع بر دو خط موازی  $3x - 4y = 8$  و  $x + 2y = 4$  منطبق هستند. مساحت این مربع کدام است؟

۱۲) (۸)

۶) (۴)

۱۴) (۴)

۷) (۲)



تست ۲۲: مجموع طول و عرض نقاطی واقع بر خط  $2 = 3x - 4y = 5$  که از خط  $y = x - 2$  بفاصله ۳ است، کدام می‌تواند باشد؟

۵۴) (۴)

-۲) (۳)

-۶) (۲)

-۵۴) (۱)



**مسئلہ ۴:** مثلث ABC با راس‌های  $C = (1, -1)$ ,  $B = (2, 0)$ ,  $A = (0, 3)$  را در نظر بگیرید. معادله ارتفاع وارد بر ضلع AB و طول آن را بیابید.



**مسئلہ ۲۳:** یکی از اضلاع مربعی بر خط  $1: y = 2x - 1$  واقع است. اگر  $A(3, 0)$  یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)



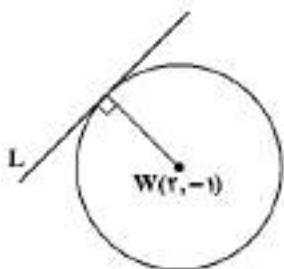
**مسئلہ ۲۴:** فاصله‌ی بین دو خط به معادلات  $y = x\sqrt{3} + 2$  و  $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$  کدام است؟

 $2 + \sqrt{3}$  (۴) $\sqrt{3} + 1$  (۳) $\sqrt{3} - 1$  (۲) $2 - \sqrt{3}$  (۱)

خارج



**مسئلہ ۲۵:** معادله‌ی چهار ضلع یک مستطیل به صورت  $x + ay = 5$ ,  $x - 2y = 14$ ,  $2x + y = 3$ ,  $2x + y = 5$  می‌باشد. محیط این مستطیل کدام است؟

 $8\sqrt{5}$  (۴) $4\sqrt{5}$  (۳) $12\sqrt{5}$  (۲) $2\sqrt{5}$  (۱)

**مسئلہ ۲۶:** خط  $L: 4x - 4y = 0$  بر دایره‌ای به مرکز  $W(r, -1)$  میانی است. شعاع دایره چقدر است؟

 $\frac{\pi}{4}$  (۰)

۲ (۱)

۳ (۲)

 $\frac{\pi}{4}$  (۳)

۴ (۴)

**مسئلہ ۲۷:** دو نقطه‌ی A و B واقع بر خط به معادله‌ی  $2x - y = 0$  از خط به معادله‌ی  $3x - 4y + 5 = 0$  به فاصله‌ی ۲ قرار دارند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

 $4\sqrt{2}$  (۴) $2\sqrt{2}$  (۳) $4\sqrt{5}$  (۲) $2\sqrt{5}$  (۱)

((اهم هادی(ع): نارضایتی پدر و مادر، کمرتوانی را به دنبال دارد و آدھی را به ذلت هیکشاند. ))

دو ضلع یک مرتع منطبق بر دو خط به معادلات  $3x - 3y = 1$  و  $x + y = 5$  هستند. مساحت این مرتع کدام است؟

$$\frac{25}{4} \quad (4)$$

$$\frac{25}{8} \quad (3)$$

$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{9}{8} \quad (1)$$

ست: ۲۸

تجربی ۹۲



نقطه  $A(-1, 3)$  وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله  $5x - 2y = 5$  است. مساحت این مرتع کدام است؟

$$80 \quad (4)$$

$$75 \quad (3)$$

$$45 \quad (2)$$

$$40 \quad (1)$$

ست: ۲۹

خارج ۹۳



نقطه  $P(0, 5)$ ،  $M(4, 2)$ ،  $N(7, 6)$  و  $A(-1, 2)$  رئوس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث چقدر است؟

$$13 \quad (4)$$

$$12/5 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$11/5 \quad (1)$$

ست: ۳۰

تجربی



نقطه  $O'(3, 2)$  مرکز لوزی  $ABCD$  است. اگر قطرهای لوزی به موازات محورهای مختصات و خط  $6x + y = 8$  معادله یکی از اصلاح این لوزی باشد، محيط لوزی چقدر است؟

$$8\sqrt{37} \quad (1)$$

$$10\sqrt{34} \quad (3)$$

$$48 \quad (2)$$

$$4\sqrt{68} \quad (4)$$

ست: ۳۱

تجربی



- از نقطه  $A(3, 2)$  خط  $y = 2x - 4$  را مماس بر دایره‌ای به مرکز  $W(-1, 2)$  رسم کرده‌ایم. فاصله  $A$  تا نقطه تماس چند برابر است؟

$$6 \quad (1)$$

$$5 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

ست: ۳۲

تجربی



**تست ۳۳:** اگر داشته باشیم  $(x, y) = A(4, 1)$ ,  $B(6, 5)$  و  $C(-2, -1)$ , فاصله نقطه  $A$  از عمود منصف پاره خط  $BC$  چند برابر  $\sqrt{10}$  است؟

۲ (۲)

۱ (۱)



$$\frac{9}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{10} \quad (۳)$$

**تست ۳۴:** - یکی از اضلاع مربعی بر خط  $l: 2x + 1 = y$  واقع است. اگر  $A(-1, 2)$  یکی از رئوس این مربع باشد، اندازه قطر مربع کدام است؟

$$\frac{5}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{5\sqrt{10}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{5} \quad (۲)$$

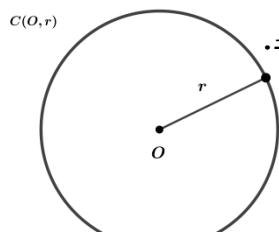
$$\frac{3\sqrt{10}}{5} \quad (۱)$$



**مسئله:** مثلث  $ABC$  با راس‌های  $C(2, 5)$ ,  $B(-3, 7)$ ,  $A(0, 4)$  را در نظر بگیرید. فاصله پای ارتفاع و میانه وارد بر ضلع  $AC$

را از یکدیگر بیابید.



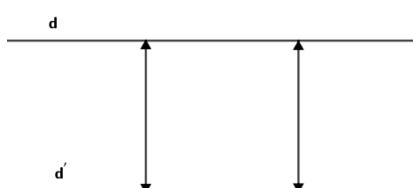


دایره: دایره  $C$  به مرکز  $O$  و شعاع  $r$ ، یا به عبارتی  $C(O, r)$  را در نظر بگیرید.

الف) همه نقاط واقع بر دایره به فاصله  $r$  از مرکز آن قرار دارند.

ب) هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از مرکز دایره برابر  $r$  باشد، بر روی دایره قرار دارد.

نتیجه: دایره مجموعه (مکان هندسی) نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت یک فاصله ثابتی دارد و هر نقطه از صفحه که این ویژگی را داشته باشد نیز، روی محیط دایره قرار دارد.



خطوط موازی: خط  $d$  موازی خط  $d'$  است، هرگاه فاصله‌ی آنها

از یکدیگر، برابر یک عدد ثابت باشد.

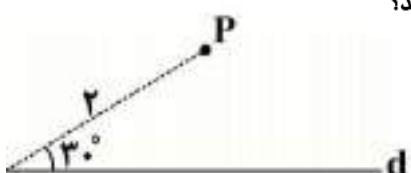
- نحوه:** - فاصله نقطه  $A$  از خط  $d$ ، برابر ۱ سانتی‌متر است. چند نقطه روی خط  $d$  وجود دارد که فاصله‌اش از نقطه  $A$ ، برابر ۲ سانتی‌متر باشد؟
- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ صفر



- نحوه:** - فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  از یکدیگر برابر ۵ است. به مرکز  $A$  و به شعاع ۴ یک کمان رسم می‌کنیم و سپس به مرکز  $B$  به شعاع ۳ کمانی دیگر رسم می‌کنیم. اگر دو کمان یکدیگر را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع کنند، محیط چهارضلعی  $AMBN$  چقدر است؟
- ۱) ۱۹ ۲) ۱۶ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲



- نحوه:** - با توجه به شکل زیر، چند نقطه وجود دارد که از نقطه  $P$  به فاصله ۲ و از خط  $d$  به فاصله ۱ باشد؟
- ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



(( اندیشیدن به سرانجام هر کار باعث رستگاری است. ))

**تست ۴:** اگر فاصله دو خط موازی  $d$  و  $d'$  برابر ۶ باشد، در این صورت کدام گزینه نشانگر همه نقاطی است که تفاضل فواصل آن نقاط از این دو خط برابر ۲ باشد؟

۱) یک خط موازی با  $d$  و  $d'$  و بین این دو

۲) دو خط موازی با  $d$  و  $d'$  و بین این دو

۳) دو خط موازی با  $d$  و  $d'$  و خارج این دو

۴) چهار خط موازی  $d$  و  $d'$

**تست ۵:** چند مثلث متمایز با طول اضلاع ۶،  $AB = 5$ ،  $BC = 5$  و به مساحت ۲۱ وجود دارد؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) صفر



- باره خط  $AB = 10$  مفروض است. اگر دو نقطه وجود داشته باشد که از  $A$  بدفاصله ۱ و از  $B$  بدفاصله ۳ باشند، کمترین مقدار صحیح برای  $x$  کدام است؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

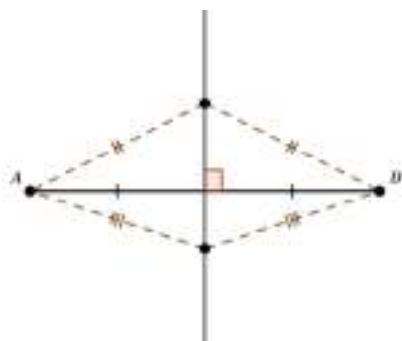
۴) ۱



### عمود منصف:

تعریف: عمود منصف هر پارهخط، خطی است که آنرا نصف کند و بر آن عمود باشد.

### قضیه:

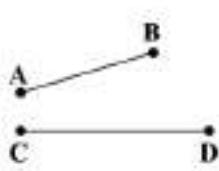


الف) هر نقطه که روی عمودمنصف یک پارهخط باشد، از دو سر آن پارهخط به یک فاصله قرار دارد.

ب) هر نقطه که از دو سر یک پارهخط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پارهخط قرار دارد.

نتیجه: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پارهخط باشد، از دو سر آن پارهخط به یک فاصله قرار دارد و هر نقطه که از دو سر یک پارهخط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پارهخط قرار دارد.

**تست ۷:** - دو پارهخط  $AB$  و  $CD$  در شکل رو به رو را در نظر بگیرید. چند نقطه مانند  $O$  روی صفحه وجود دارد که تساوی‌های  $OC = OD$  و  $OA = OB$  برقرار باشند؟



۱) ۰

۲) ۱

۳) صفر

۴) بیش از ۲



دانلود از سایت ریاضی سرا

**تست ۸:** دو نقطه A و B به فاصله ۶ از یکدیگر قرار دارند. از A و B کمان‌هایی به شعاع x رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط P و Q قطع کنند. خطی که از P و Q می‌گذرد، عمودمنصف AB است. مقدار x کدام می‌تواند باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



**تست ۹:** محل برخورد قطرهای یک مریع، مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ است. اگر طول قطر مریع A واحد باشد، دایره و مریع در چند

نقطه با یکدیگر برخورد دارند؟



۰ (۰) صفر

۲ (۲)

۴ (۴)

۱ (۱)

**تست ۱۰:** دو پاره خط AB و CD را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. نقاطی را که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه C و D نیز به یک

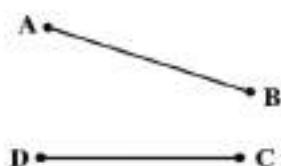
فاصله باشد، O می‌نامیم. اگر نقطه O روی عمودمنصف BC باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

(۱) BD و AC بر یکدیگر عمودند.

(۲) نقطه O از دو پاره خط CD و AB به یک فاصله است.

(۳) نقاط C, B, A و D روی یک دایره واقع‌اند.

(۴) نقطه O از دو پاره خط AD و BC به یک فاصله است.



**تست ۱۱:** اگر در یک مثلث، مجموع دو زاویه برابر با زاویه سوم باشد، آنگاه محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث کجا قرار دارد؟

(۱) روی رأس بزرگ‌ترین زاویه

(۲) درون مثلث

(۳) روی بزرگ‌ترین ضلع

(۴) بیرون مثلث



**تست ۱۲:** همواره چند نقطه در صفحه می‌تواند وجود داشته باشد بهطوری که فاصله آنها از نقاط متماز A, B, C, D در همان صفحه به یک اندازه باشد؟

۱ (۱)

۰ (۰) صفر یا یک

۲ (۲) بی‌نهایت



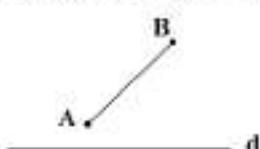
**تست ۱۳:** خط  $\ell$  و پاره خط AB غیرموازی با  $\ell$  طبق شکل در صفحه رسم شده است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از خط  $\ell$  به فاصله‌ی ۴ واحد و از دوسر پاره خط AB، فاصله‌ی یکسانی داشته باشد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) صفر

۴ (۴)



رسم عمود منصف:

برای رسم عمودمنصف پاره خط  $\overline{AB}$  مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

- الف) دهانه پرگار را بیش از نصف طول  $\overline{AB}$  باز کنید و یک بار به مرکز نقطه  $A$  و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز  $B$  کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند  $P$  و  $Q$  قطع کنند.
- ب) نقاط  $P$  و  $Q$  متعلق به عمودمنصف  $\overline{AB}$  هستند، چون از دو سر پاره خط به یک فاصله هستند.
- پ) از متصل کردن این نقاط و امتداد دادن آنها، عمودمنصف پاره خط  $\overline{AB}$  بدست می‌آید.

**تست ۱۴:** اگر طول پاره خط  $MN$  برابر ۷ واحد باشد، آن‌گاه چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از  $M$  به فاصله ۵ واحد و از  $N$  به فاصله ۴ واحد باشد؟

۱) ۳

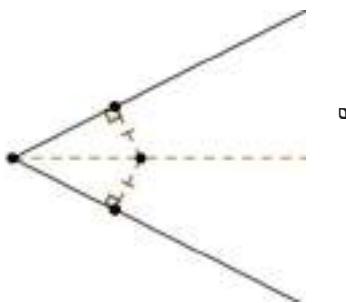
۱) میخ

۲) بی‌شمار

۲) ۳

نیمساز:

تعریف: نیمساز یک زاویه نیمخطی است که آن زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

قضیه:

الف) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله قرار دارد.

ب) هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

نتیجه: نیمساز مجموعه (مکان هندسی) نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله قرار دارد و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

**تست ۱۵:** نقاط  $A$ ,  $B$  و  $C$  رأس‌های مثلث دلخواه  $ABC$  هستند. محل تلاقی نیمسازهای زاویه‌های  $A$  و  $B$  را  $O$  می‌نامیم. فاصله این نقطه را از اضلاع مثلث،  $h_1$ ,  $h_2$  و  $h_3$  می‌نامیم. کدام گزینه در مورد این فاصله‌ها درست است؟



$$h_1 = h_2 = h_3 \quad (۱)$$

$$h_1 h_2 h_3 = 1 \quad (۲)$$

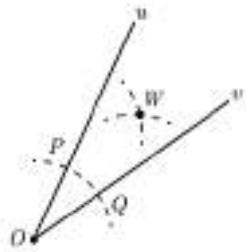
$$\frac{h_1 + h_2}{h_3} = 3 \quad (۳)$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 1 \quad (۴)$$

رسم نیمساز:



الف) زاویه  $\hat{Ouv}$  را درنظر بگیرید. به مرکز  $O$  و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیمخطهای  $Op$  و  $OQ$  را در نقاطی مانند  $P$  و  $Q$  قطع کند. واضح است که  $OP = OQ$ .

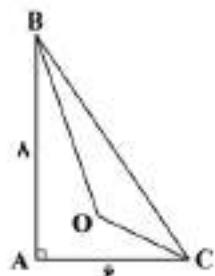


ب) دهانه پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره خط  $PQ$  باز کنید و یک بار به مرکز  $P$  و بار دیگر به مرکز  $Q$  کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطهای مانند  $W$  قطع کند. واضح است که  $PW = QW$ .

پ) نیم خط رسم شده از نقاط  $O$  و  $W$  نیمساز زاویه  $\hat{Ouv}$  است. زیرا دو مثلث  $OQW$  و  $OPW$  با

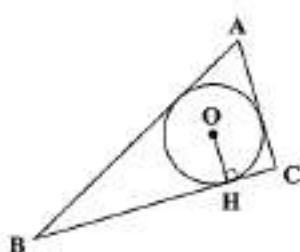
$$\hat{WOv} = \hat{WOu} = \hat{QWu}$$

تست ۱۶: - در شکل رویه رو، مثلث  $ABC$  قائم الزاویه است ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). آنچه نیمسازهای دو زاویه  $B$  و  $C$  یکدیگر را در نقطه  $O$  قطع کنند، فاصله  $O$  از وتر

مثلث  $ABC$  چقدر است؟

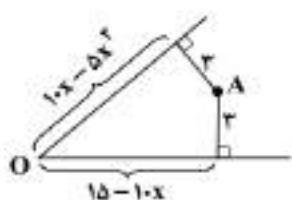
- (۱)  $\frac{3}{4}$   
 (۲)  $\frac{2}{3}$   
 (۳)  $\frac{1}{2}$   
 (۴)  $\frac{5}{4}$

تست ۱۷: - در شکل رویه رو، دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $OH$  بر هر سه ضلع مثلث  $ABC$  مماس است. نقطه  $O$  محل تقاطع ..... در مثلث  $ABC$  است.



- (۱) نیمسازها  
 (۲) میانهها  
 (۳) عمودمختصها  
 (۴) ارتقایها

تست ۱۸: - در شکل رویه رو فاصله نقطه  $O$  تا نقطه  $A$  کدام است؟



- (۱)  $x$   
 (۲)  $\sqrt{2x^2 + 1}$   
 (۳)  $x\sqrt{2}$   
 (۴)  $\sqrt{x^2 + 1}$

**تست ۱۹:** - چه تعداد از موارد زیر نادرست است؟

- الف) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.  
 ب) هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد، بر روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.  
 پ) مثلثی وجود دارد که طول ضلع‌های آن ۴، ۳ و ۸ است.

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

**تست ۲۰:** - پاره خط  $AB = 10$  مفروض است. اگر دو نقطه وجود داشته باشد که از  $A$  به فاصله ۶ و از  $B$  به فاصله ۱-۲۸ باشد، کمترین مقدار صحیح برای  $X$  کدام است؟

۴) ۴

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

**تست ۲۱:** ۱- در مثلث  $ABC$  طول دو ضلع  $AB$  و  $AC$  به ترتیب ۴ و ۶ سانتی‌متر و مقدار مساحت برابر ۱۰ سانتی‌مترمربع است. اگر نیمساز داخلی  $\hat{A}$ ، ضلع  $BC$  را در نقطه  $D$  قطع کند، فاصله نقطه  $D$  از ضلع  $AB$  کدام است؟

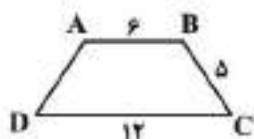
$\frac{3}{2}$  (۱)

۱) ۵

۲) ۴

$\frac{1}{2}$  (۰)

**تست ۲۲:** در ذوزنقه متساوی الساقین زیر، نیمسازهای داخلی دو زاویه  $B$  و  $C$  هم‌پیگر را در نقطه  $O$  قطع می‌کنند. فاصله  $O$  از ضلع  $BC$  کدام است؟



۲) ۳

۲) ۰

۲/۵ (۴)

۳/۵ (۳)

**تست ۲۳:** چند نقطه روی یک دایره وجود دارد که از دو خط متقاطع  $d_1$  و  $d_2$  به یک فاصله باشند؟

۲) حداقل ۲

۱) حداقل ۷

۴) حداقل ۴

۳) حداقل ۴

(()) تنها خوبی موجود در جهان، شناخت و دانش و تنها شر و زشتی ندانی است. (۴۰))

**تست ۲۶:** داخل مثلث  $ABC$  دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر هر سه ضلع آن محاس باشد. اگر  $O$  مرکز این دایره باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) قطر دایره برابر ضلع کوچکتر مثلث است.

(۲) نقطه‌ی  $O$  محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است.

(۳) قطر دایره برابر ضلع بزرگ‌تر مثلث است.

(۴) نقطه‌ی  $O$  محل برخورد سه عمودمنصف اضلاع مثلث است.

به مرکز  $O$  کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه  $xOy$  را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند حال به مراکز  $A$  و  $B$  کمان‌هایی به طول شاعر  $\frac{3}{4}AB$

رسم می‌کنیم تا این دو کمان همدیگر را در نقطه  $C$  درون زاویه قطع کنند. در این صورت کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

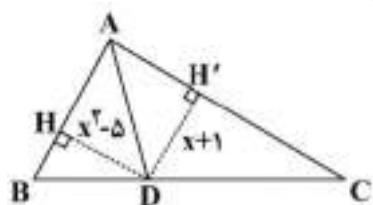
(۱) از وسط  $AB$  می‌گذرد  $OC$

(۲) مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است

(۳) نیمساز زاویه  $xOy$  است.

(۴) عمود معکوس خط  $AB$  است  $OC$

**تست ۲۷:** در شکل زیر، اگر  $\frac{AC}{AB} = \frac{x+3}{x+2}$  باشد، نسبت  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  باشد، کدام است؟



$\frac{4}{3}$  (۱)

$\frac{5}{4}$  (۲)

$\frac{7}{6}$  (۳)

$\frac{6}{5}$  (۴)

مثلثی به اضلاع  $a$ ,  $b$  و  $c$  مفروض است. اگر فاصله‌ی محل برخورد نیمسازها از ضلع  $a$  برابر  $x^2 - 5x + 7$  و از ضلع  $b$  برابر  $x^2 + 2x + 7$  باشد، فاصله‌ی محل برخورد نیمسازها تا ضلع  $c$  چندراست؟

۱۵ (۱)

۲۴ (۲)

۲۲ (۳)

۱۸ (۴)



## نسبت و تنااسب:

هر دو نسبت مساوی یک تنااسب را تشکیل می‌دهند. در زیر تعدادی از خواص مهم در تنااسب را بررسی می‌کنیم:

$$a) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad \text{طرفین وسطین} \quad b) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{معکوس کردن طرفین}$$

$$c) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{تعویض جای طرفین با وسطین}$$

$$d) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c} \quad \text{ترکیب نسبت در صورت و مخرج}$$

$$e) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \quad \text{تفضیل نسبت در صورت و مخرج}$$

$$f) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$$\boxed{\text{EX}) \quad \frac{a}{3} = \frac{20}{12} \Rightarrow \frac{a+3}{3} = \frac{20+12}{12}, \quad \frac{a-3}{3} = \frac{20-12}{12}, \quad \frac{a}{3} = \frac{a+20}{3+12}}$$

$$\frac{b+c+d+e}{a} - \frac{a+b+d+e}{c} \quad \text{کدام است؟} \quad \text{۱) (۴)} \quad \text{۲) (۳)} \quad \text{۳) (۲)} \quad \text{۴) (۱)}$$



## استدلال استقرایی:

این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌گیری کلی از آن گرفته می‌شود، استدلال استقرایی نامیده می‌شود. پس در حالت کلی می‌توان گفت در این استدلال از جزء به کل می‌رسیم.

## استدلال استنتاجی:

استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

نکته: استدلال استقرایی استدلال دقیقی نیست ولی برای رسیدن به یک فرضیه مناسب است. اما استدلال استنتاجی کاملاً دقیق است.

نکته: برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه نامیده می‌شوند. مانند قضیه فیثاغوثر، قضیه تالس.

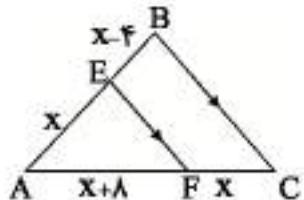


- تست ۲:** استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌های کلی گرفته می‌شود؛ یعنی از جزء به کل می‌رسیم، .....  
نامیده می‌شود.
- ۱) استدلال استنتاجی   
 ۲) قضیه   
 ۳) برهان خلف   
 ۴) استدلال استقرایی 

قضیه تالس:

اگر در مثلث  $ABC$ ، خطی موازی ضلع  $BC$  رسم کنیم به طوری که اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب در نقاط

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{قطع کند، آنگاه خواهیم داشت: } E \text{ و } D$$



**تست ۳:** با توجه به شکل مقابل، مقدار  $x$  کدام است؟ ( $EF \parallel BC$ )

- ۱) ۱   
 ۲) ۲   
 ۳) ۳   
 ۴) ۴ 

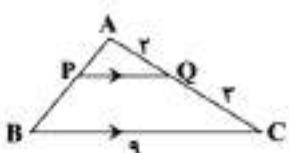
**تست ۴:** مطابق شکل، اگر  $DE \parallel BC$  باشد، اندازه  $EC$  کدام است؟

- ۱) ۱   
 ۲) ۲   
 ۳) ۳   
 ۴) ۴ 

تعمیم قضیه تالس:

اگر در مثلث  $ABC$ ، خطی موازی ضلع  $BC$  رسم کنیم به طوری که اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{قطع کند، آنگاه خواهیم داشت: } E \text{ و } D$$

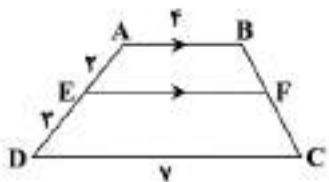


**تست ۵:** در شکل رو به رو،  $PQ \parallel BC$ . طول پاره خط  $PQ$  کدام است؟

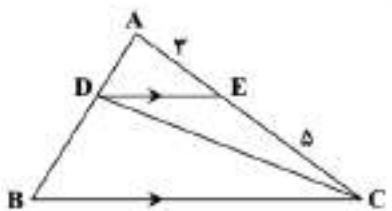
- ۱) ۱   
 ۲) ۲   
 ۳) ۳   
 ۴) ۴ 

**تست ۱:** - اگر در ذوزنقه ABCD داشته باشیم  $EF \parallel AB$ . طول EF چندراست؟

- ۱) ۵
- ۲)  $\frac{5}{2}$
- ۳)  $\frac{5}{3}$
- ۴) ۴

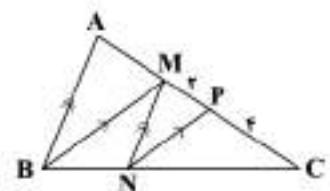


**تست ۲:**



- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) ۵
- ۴) ۶

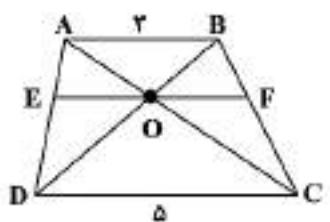
**تست ۳:** - در مثلث ABC داریم  $MN \parallel AB$  و  $NP \parallel MB$ . طول AM چندراست؟



- ۱)  $\frac{5}{2}$
- ۲) ۰
- ۳) ۲
- ۴) ۳

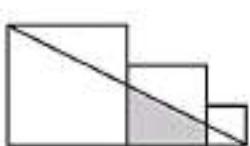
**تست ۴:**

- در ذوزنقه ABCD شکل زیر داریم:  $EF \parallel AB$ . حاصل  $\frac{OE}{OF}$  کدام است؟



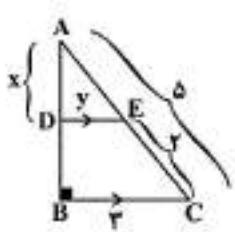
- ۱) ۱
- ۲)  $\frac{5}{8}$
- ۳)  $\frac{2}{5}$
- ۴)  $\frac{5}{4}$

**تست ۵:** - در شکل زیر، سه مربع به طول اضلاع ۲، ۴ و ۱ واحد کنار هم قرار گرفتهاند. مساحت ذوزنقه سایه زده شده کدام است؟



- ۱)  $\frac{15}{2}$
- ۲) ۴
- ۳)  $\frac{17}{2}$
- ۴)  $\frac{16}{2}$

**تست ۶:**



**تست ۷:** - در شکل زیر،  $x + y$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{\pi}{2}$
- ۲)  $\frac{3\pi}{2}$
- ۳)  $\frac{5\pi}{2}$
- ۴)  $\frac{7\pi}{2}$

**تست ۸:**

**تست ۱۲:** در مثلث ABC، AM میانه‌ی نظیر رأس A است و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC، اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و

قطع می‌کنند. اگر  $AM = 6$  و  $BC = 10$  باشد آن‌گاه طول PQ کدام است؟

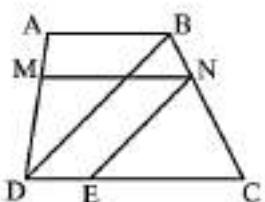
$$\frac{6}{11} \quad \text{(۴)}$$

(۱)

$$5 \quad \text{(۴)}$$

$$\frac{5}{11} \quad \text{(۳)}$$

در ذوزنقه زیر،  $CD = 15$ ،  $\frac{AM}{MD} = \frac{r}{y}$ . اگر  $NE \parallel BD$ ،  $MN \parallel AB \parallel CD$ ،  $CE$ ،

**تست ۱۳:**

کدام است؟

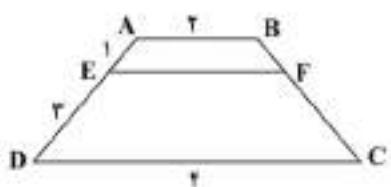
۹/۵ (۱)

۹ (۲)

۸/۵ (۳)

۸ (۴)

- ذوزنقه متوازی‌الساقین ABCD مفروض است. طول پاره خط EF که موازی دو قاعده رسم شود، کدام است؟

**تست ۱۴:**

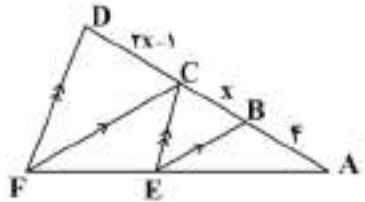
۹/۵ (۱)

۹/۵ (۲)

۹ (۳)

۹ (۴)

در شکل زیر، اندازه پاره خط AD کدام است؟ ( $BE \parallel CF, EC \parallel FD$ )

**تست ۱۵:**

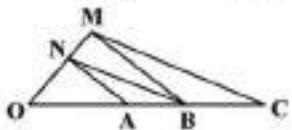
۹ (۱)

۹ (۲)

۹ (۳)

۹ (۴)

در شکل زیر،  $OC = x + r$ ،  $OB = x$ ،  $OA = rx - s$  می‌باشد. اگر  $NB \parallel MC$ ،  $NA \parallel MB$  چقدر است؟

**تست ۱۶:**

۹ (۱)

۹ (۲)

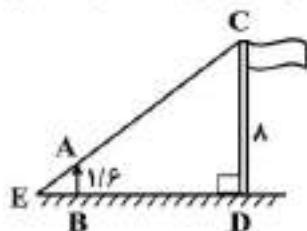
۹ (۳)

۹ (۴)

دانلود از سایت ریاضی سرا



در شکل زیر پاره خط  $AB$  شخصی است که در فاصله‌ی ۲ متری از پای پرچمی به ارتفاع ۸ متر ایستاده است. اگر ندازه قد شخص  $1/2$  متر باشد، طول



کامل  $EC$  چند متر است؟

ست: ۱۷



$\sqrt{11}$  (۱)

۱۱ (۳)

$\sqrt{88}$  (۰)

۹ (۴)

در شکل زیر محیط ذوزنقه  $MNPQ$  برابر ۲۲ است. انداد ساق‌های این ذوزنقه در  $A$  متناظراند. محیط مثلث  $AMN$  کدام است؟

ست: ۱۸

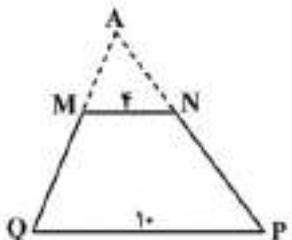


۱۴ (۰)

۱۲ (۲)

۱۰ (۲)

۱۸ (۴)



در مربع  $ABCD$  ضلع  $CD$  را از طرف  $C$  به اندازه‌ی  $E$  امتداد می‌دهیم، به طوری که  $AE$  ضلع  $BC$  را در  $F$  قطع کند

ست: ۱۹



مساحت چهارضلع  $AFCD$  چند برابر مساحت مربع است؟

$\frac{5}{2}$  (۰)

$\frac{3}{4}$  (۰)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{4}{5}$  (۱)

در شکل مقابل، حاصل  $EF + MN + PQ$  کدام است؟

ست: ۲۰

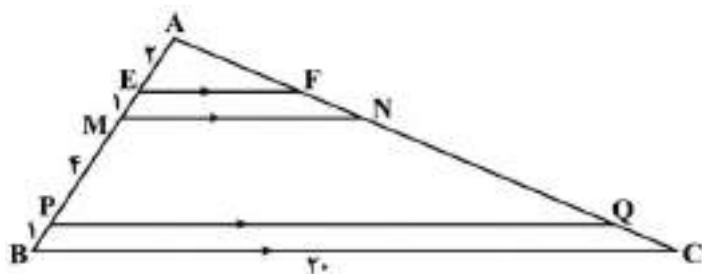


۲۸ (۱)

۲۰ (۲)

۲۲ (۲)

$\frac{91}{2}$  (۴)



در شکل زیر،  $ABCD$  ذوزنقه و  $M$ ،  $N$  وسط دو ساق است. طول  $EF$  کدام است؟

ست: ۲۱

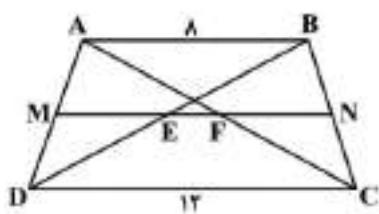


۷ (۰)

$1/2$  (۰)

۱ (۰)

$\frac{7}{4}$  (۰)



**تست ۲۲:** در مربعی به ضلع  $2\sqrt{2}$  واحد، فاصله‌ی وسط یک ضلع از قطر مربع کدام است؟

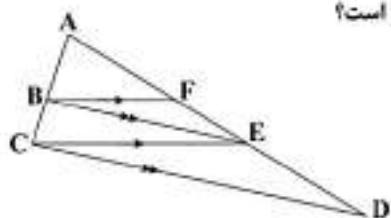
(۱)  $2\sqrt{2}$ (۲)  $\sqrt{2}$ 

(۳) ۲

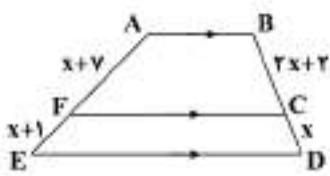
(۴) ۱



در شکل زیر،  $BE \parallel DC$ ،  $BF \parallel CE$  است. اگر  $FD = 7$ ،  $AF = 4$  باشد، مقدار  $AE$  چقدر است؟

(۱)  $\sqrt{11}$ (۲)  $2\sqrt{11}$ (۳)  $2\sqrt{7}$ (۴)  $2\sqrt{12}$ 

**تست ۲۳:** در شکل زیر  $AB \parallel FC \parallel ED$  است. اندازه‌ی  $BD$  چقدر است؟



(۱) فقط ۵

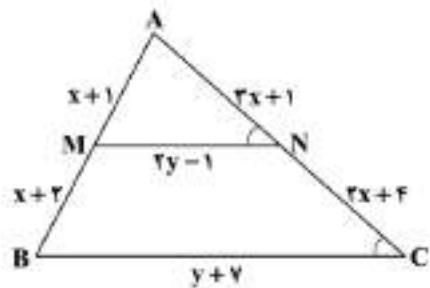
(۲) فقط ۸

(۳) ۵ یا ۸

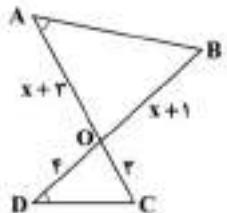
(۴) ۴



**تست ۲۴:** در شکل روبرو  $\hat{N} = \hat{C}$ . مقدار  $x + y$  کدام است؟

 $\frac{22}{11}$  $\frac{19}{11}$  $\frac{29}{11}$  $\frac{27}{11}$ 

**تست ۲۵:** در شکل روبرو اگر  $\hat{A} = \hat{D}$  . مساحت مثلث  $ODC$  چند برابر مساحت مثلث  $OAB$  است؟

 $\frac{1}{2}$  $\frac{r}{24}$  $\frac{1}{r}$  $\frac{1}{8}$ 

عکس قضیه: اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس قضیه ایجاد می‌شود. عکس یک قضیه

ممکن است درست یا نادرست باشد.



دانلود از سایت ریاضی سرا

((آن که هی خواهد خوب زندگی کند باید به حقیقت نزدیک بشوند، زیرا پس از نیل به مقام حقیقتیابی است که از غم و اندوه دنیا دست برخیدارند.))

**مثال:** عکس قضایای زیر را بنویسید.

**الف)** اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

**ب)** اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آن‌گاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

### عکس قضیه تالس:

$$\text{اگر در مثلث } \triangle ABC, \text{ داشته باشیم } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



### قضیه دو شرطی:

فرض کنیم عکس یک قضیه درست باشد. اگر قضیه و عکس آنرا در غالب یک جمله بیان کنیم، قضیه حاصل، قضیه دو شرطی نامیده می‌شود. در این صورت می‌گوییم (فرض) اگر و تنها اگر (حکم) و یا اگر (فرض) آن‌گاه (حکم) و بر عکس.



**مثال:** الف) قضیه تالس را به صورت دو شرطی بیان کنید.



**ب)** قضیه فیثاغورس را به صورت دو شرطی بیان کنید.

### تئت ۲۷: کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اگر فرض و حکم یک قضیه را جایه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» است.
- (۲) اگر یک قضیه و عکس آن هر دو درست باشند، به آن «قضیه دوشرطی» می‌گوییم.
- (۳) در برهان خلف، فرض را نادرست درنظرمی‌گیریم و به نادرست بودن حکم می‌رسیم.
- (۴) عکس یک قضیه، ممکن است درست یا نادرست باشد.



### برهان خلف:

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. در برهان خلف به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

**نکته:** به کمک برهان خلف بسیاری از قضایا و مسائل به سادگی قابل حل هستند. به همین دلیل این نوع استدلال در ریاضی کاربرد زیادی دارد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

**مثال ۳:** به برهان خلف نشان دهید که اگر  $x^2$  عددی زوج باشد، آن‌گاه  $x$  نیز عددی زوج است.



**مثال ۴:** به برهان خلف نشان دهید که اگر  $x^2$  عددی فرد باشد، آن‌گاه  $x$  نیز عددی فرد است.



**مثال ۵:** اگر فرض کنیم  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  از مثلث  $ABC$  و  $BD \neq DC$  باشد، آن‌گاه  $AB \neq AC$ .



تست ۲۸: می‌خواهیم با برهان خلف ثابت کنیم که اگر  $n$  عضو اعداد طبیعی باشد و  $n^2$  عددی فرد باشد، آن‌گاه  $n$  نیز عددی فرد است، در این صورت کدام گزینه

برای اثبات این مطلب با برهان خلف صحیح است؟



۱) فرض می‌کنیم که  $n$  عددی فرد است و سپس نشان می‌دهیم  $n^2$  نیز فرد است.

۲) فرض می‌کنیم که  $n$  عددی زوج است و سپس نشان می‌دهیم  $n^2$  فرد خواهد بود.

۳) فرض می‌کنیم که  $n$  عددی زوج است و سپس نشان می‌دهیم  $n^2$  زوج خواهد بود.

۴) فرض می‌کنیم که  $n$  عددی فرد است و سپس نشان می‌دهیم  $n^2$  زوج خواهد بود.

**مثال نقض:** اگر برای رد حکم از یک مثال استفاده کنیم، به این مثال، مثال نقض می‌گوییم.



**نکته:** برای رد یک حکم، آوردن یک مثال نقض کافی است ولی بیان هر تعداد مثال حکمی را اثبات نمی‌کند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

(( موفقیت این نیست که هیچ وقت اشتباه نکنی، بلکه هیچ وقت یک اشتباه را دو بار هر تک نشی. ))

**مثال:** با یک مثال نقض، حکم‌های زیر را رد کنید.

**که:** الف) همه اعداد اول، زوج هستند.

ب) اگر  $a = 0$ , آنگاه  $a(b-1) = 0$ .

پ) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟

**مسئله ۲۹:**

کدام یک از حکم‌های کلی زیر، درست است؟

- ۱) بهازی هر عدد طبیعی  $n$ , مقدار  $n^2 + n + 41$ , عددی اول است.  
۴) همه اعداد اول، فرد هستند.

۱) اگر مربع عددی فرد باشد، خود آن عدد زوج است.

۳) در هر مستطیل، اندازه قطرها با هم برابر است.

**مسئله ۳۰:**

چه تعداد از موارد زیر را می‌توان به صورت قضیه‌ای دوشرطی بیان کرد؟

الف) اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

ب) اگر  $y = x$ , آنگاه  $x^2 = y^2$ .

پ) اگر  $n$  عددی زوج باشد، آنگاه  $n^2$  نیز عددی زوج است.

۴) صفر

۳

۲

۱)

**مسئله ۳۱:**

کدام حکم زیر مثال نقض ندارد؟

۱) هر عدد لولی فرد است.

۲) مقدار  $n^2 + n + 41$  برای هر  $n$  طبیعی اول است.

۳) همه‌ی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، متشابهند.

۴) چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد، متوازی‌الاضلاع است.

**مسئله ۳۲:**

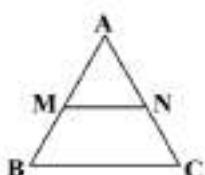
- آیات کدام گزینه به برهان خلف تباخته است؟

۱) اگر  $n \in \mathbb{N}$  و  $n^2$  عددی فرد باشد، آنگاه  $n$  نیز عددی فرد است.

۲) در شکل رویه را اگر  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ , آنگاه:  $MN \parallel BC$

۳) از یک نقطه غیرواقع بر یک خط نمی‌توان دو عمود بر آن خط رسم کرد.

۴) اگر در یک چهارضلعی اضلاع رویه را موازی باشند، آنگاه زوایای رویه را با هم برابرند.



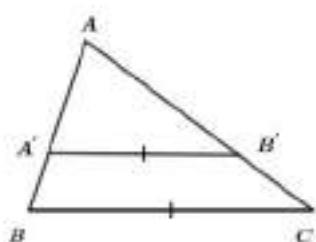
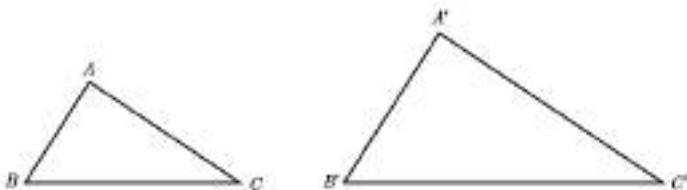
دانلود از سایت ریاضی سرا



مشابه مثلثها: دو مثلث  $A'B'C'$  و  $ABC$  مشابه هستند هرگاه زاویه‌هایشان برابر و اضلاعشان

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (\text{ب}) \quad \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$

متناوب باشند. یعنی:



### قضیه اساسی مشابه مثلثها:

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند.

آنگاه مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه مشابه است.

تست ۲

۴ سه

۳ دو

۲ یک

۱ هیچ



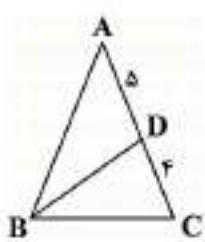
قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث مشابه‌اند.

نکته: مثلث حاصل از اتصال وسط اضلاع هر مثلث، با مثلث اولیه مشابه است.



تست ۳

در مثلث زیر  $BD = BC$  و  $AB = AC$  می‌باشد محیط مثلث  $BDC$  کدام است؟



۱۰ (۱)

۱۶ (۲)

۱۸ (۳)

۲۰ (۴)



تست ۴

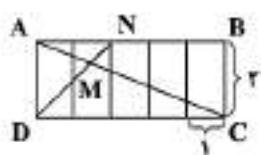
- در شکل زیر، یک مستطیل  $2 \times 1$  در کنار یک دیگر مستطیل  $ABCD$  را تشکیل داده‌اند. اندازه پاره خط  $MN$  چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟

۱۰

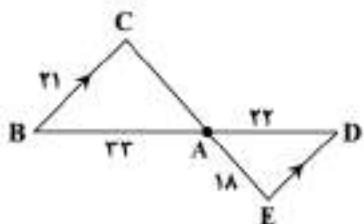
۱۲

۱۴

۱۶

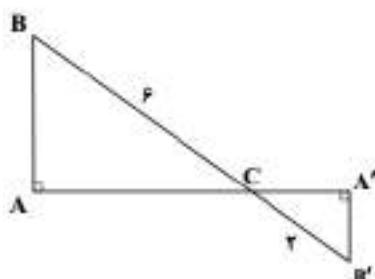


دانلود از سایت ریاضی سرا



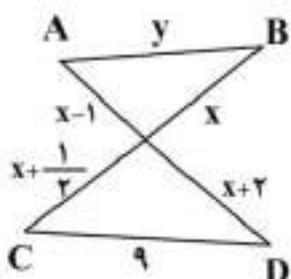
تست ۴: با توجه به شکل رویه‌رو، حاصل  $AC + DE$  کدام است؟

- ۱۱ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۱۳ (۳)
- ۱۴ (۴)



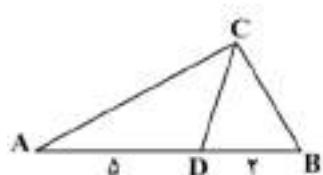
تست ۵: با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث  $ABC$  چند برابر مساحت مثلث  $A'B'C$  است؟

- ۱۵ (۱)
- ۱۶ (۲)
- ۱۷ (۳)
- ۱۸ (۴)



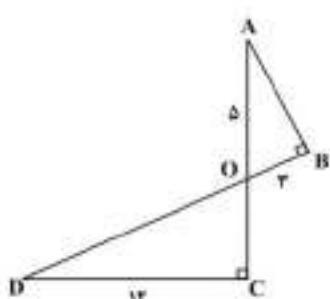
تست ۶: به ازای کدام مقدار  $y$ ، دو مثلث زیر متشابه‌اند؟  $CD \parallel AB$  و  $CD \parallel AB$  موازی نیستند.

- ۱۹ (۱)
- ۲۰ (۲)
- ۲۱ (۳)
- ۲۲ (۴)



تست ۷: در شکل زیر  $DC = DC$  و  $AB = AC$ . حاصل عبارت  $DC^y$  کدام است؟

- ۲۳ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۲۵ (۳)
- ۲۶ (۴)



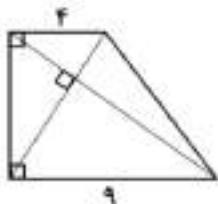
تست ۸: در شکل زیر مساحت مثلث  $COD$  چند برابر مساحت مثلث  $AOB$  است؟

- ۲۷ (۱)
- ۲۸ (۲)
- ۲۹ (۳)
- ۳۰ (۴)



(()) هیان دانستن و دریافت کردن فاصله زیادی است، دانستن دشوار نیست اما دریافت کردن دشوار است.(())

در ذوزنقه قائم الزاویه مقابل، اندازه ساق قائم کدام است؟



سته:

- (۱) ۵  
(۲) ۶  
(۳) ۷  
(۴) ۸



۱- در شکل رویه را اگر طول پاره خط AB برابر  $10$  و زوایای  $M_1$  و  $M_2$  متمم باشند، آنگاه مساحت مثلث  $AMN$  کدام است؟

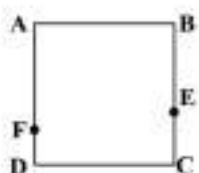


سته:

- (۱) ۱۲  
(۲) ۲۴  
(۳) ۳۶  
(۴) ۷۲



- در مربع  $ABCD$  به طول ضلع  $A$  نقاط  $E$  و  $F$  به ترتیب روی اضلاع  $BC$  و  $AD$  به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که  $FD = 2$  و  $BE = 5$ . اگر اضلاع  $CF$  و  $AE$  برابر باشند، مساحت مثلث  $AMF$  کدام است؟



سته:

- (۱) ۲۴  
(۲) ۴۰  
(۳) ۴۸  
(۴) ۶۴

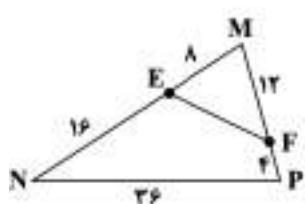


قضیه ۵: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زوایه بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



سته:

- (۱) ۲۸  
(۲) ۳۲  
(۳) ۳۶  
(۴) ۴۰

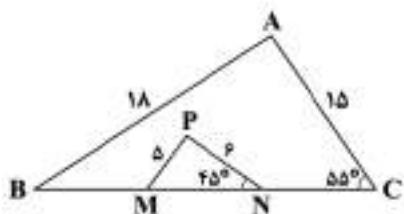


۹

در شکل زیر، محیط مثلث  $MEF$  چقدر است؟

قضیه ۶: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.





تست ۱۳: در شکل رویه‌رو،  $BM = MN = NC$ . اندازه زاویه  $MPN$  چقدر است؟

$72^\circ$  (۱)

$75^\circ$  (۲)

$80^\circ$  (۳)

$85^\circ$  (۴)



قضیه: اگر  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$  و داشته باشیم:  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

مورد محیط‌ها، نیمسازها، میانه‌ها، ارتفاع‌ها و مساحت‌های این دو مثلث خواهیم داشت:

$$\frac{AM}{A'M'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{P}{P'} = k, \frac{S}{S'} = k^2$$

تست ۱۴: نسبت مساحت دو مثلث متشابه  $ABC$  و  $A'B'C'$  به صورت  $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{4}{16}$  است. اگر بزرگترین ضلع مثلث  $ABC$   $7$  واحد و نسبت

کوچکترین ضلع به بزرگترین ضلع در مثلث  $A'B'C'$  باشد اندازه ضلع کوچکتر در مثلث  $A'B'C'$  چند واحد است؟

$\frac{14}{4}$  (۱)

$\frac{7}{4}$  (۲)

$\frac{48}{9}$  (۳)

$\frac{56}{9}$  (۴)



تست ۱۵: نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر  $\frac{2}{5}$  و محیط مثلث بزرگتر  $15$  واحد بیشتر از محیط مثلث کوچکتر است. مجموع محیط‌های دو مثلث چند واحد است؟

۷۵ (۱)

۷۷ (۲)

۷۵ (۳)

۷۹ (۴)



تست ۱۶: اگر مساحت‌های دو مثلث متشابه را به ترتیب با  $S_1$  و  $S_2$  و محیط‌های آنها را به ترتیب با  $P_1$  و  $P_2$  نشان دهیم،

کدام رابطه همواره درست است؟



$$P_1 S_1 = P_2 S_2 \quad (۱)$$

$$S_1 \sqrt{P_1} = S_2 \sqrt{P_2} \quad (۲)$$

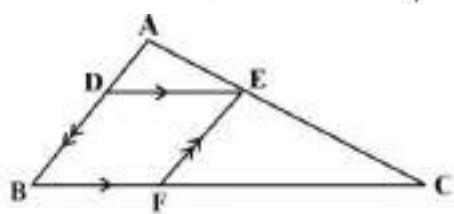
$$S_1 P_1^2 = S_2 P_2^2 \quad (۳)$$

$$P_1 S_1^2 = P_2 S_2^2 \quad (۴)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

(()) همه چیز در زندگی نشانه است، جهان به زبانی ساخته شده که همه هیئت‌واند بشنوند، اما آن را فراموش کردند.

در مثلث  $ABC$  در شکل زیر،  $EF \parallel AB$ ،  $DE \parallel BC$ ، نسبت مساحت



متوازی‌الاضلاع  $BDEF$  به مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

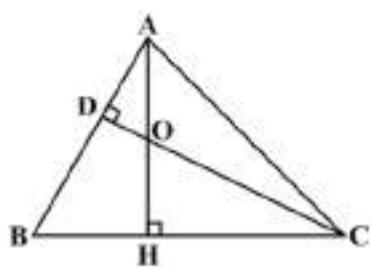
$\frac{3}{8} \text{ (۱)}$

$\frac{1}{8} \text{ (۲)}$



ست: ۱۸

در شکل مقابل  $CD = 12$  و  $OA = OH = \sqrt{22}$  می‌باشد. انتازه ضلع  $AC$  کدام است؟



$2\sqrt{55} \text{ (۱)}$

$2\sqrt{57} \text{ (۲)}$

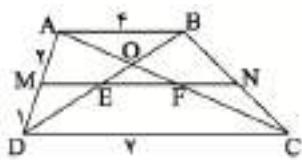
$2\sqrt{51} \text{ (۳)}$

$2\sqrt{53} \text{ (۴)}$



ست: ۱۹

در ذوزنقه  $MN \parallel DC$ ،  $ABCD$  است. نسبت محیط  $\triangle OEF$  به محیط  $\triangle OAB$  کدام است؟



$\frac{5}{6} \text{ (۱)}$

$\frac{5}{12} \text{ (۲)}$



ست: ۲۰

در دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه، وتر یکی  $4$  برابر وتر دیگری است. اگر مساحت مثلث کوچکتر برابر  $5$  باشد و اسطعه هندسی مثبت اضلاع قائمه در مثلث

بزرگتر کدام است؟

$8\sqrt{5} \text{ (۱)}$

$4\sqrt{10} \text{ (۲)}$

$4\sqrt{5} \text{ (۳)}$

$16\sqrt{5} \text{ (۴)}$



ست: ۲۱

در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $A = 90^\circ$ )، ارتفاع  $AH$  وسم شده است. اگر مساحت مثلث  $1/8$   $ABC$  برابر مساحت مثلث  $ABH$  باشد. نسبت فواصل

پای ارتفاع وارد بر وتر از دو ضلع قائمه مثلث  $ABC$  چقدر است؟

$\frac{5}{4} \text{ (۱)}$

$\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (۲)}$

$\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ (۳)}$

$\frac{2}{3} \text{ (۴)}$



تست ۲۲: اندازه‌ی اضلاع مثلث ABC،  $\frac{7}{5}$ ،  $\frac{8}{5}$  و  $\frac{7}{5}$  و بلندترین ارتفاع آن  $\frac{7}{5}$  می‌باشد. مجموع اندازه‌های دو ارتفاع دیگر کدام است؟

$\frac{14}{5}$  (۱)

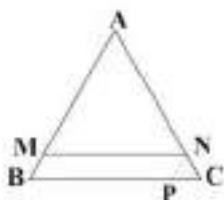
$\frac{68}{17}$  (۲)

$\frac{128}{17}$  (۳)

$\frac{52}{17}$  (۴)



در شکل زیر،  $AM = 5MB$  و  $NP \parallel MB$  و  $MN \parallel BC$  است. اگر مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث NPC است؟



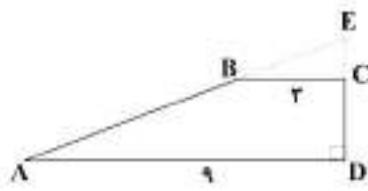
۱۸ (۱)

۲۰ (۲)

۲۴ (۳)

۳۶ (۴)

تست ۲۳: در ذوزنقه‌ی شکل زیر، امتداد AB و CD هم‌دیگر را در نقطه‌ی E قطع کرده‌اند. اگر محیط ذوزنقه ABCD، ۲۰ واحد باشد، آن‌گاه محیط مثلث EBC کدام است؟



۵ (۱)

۷ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

تست ۲۴: در مثلث ABC اندازه‌ی سه ارتفاع، ۳، ۴ و ۵ است. اگر ضلع بزرگ‌تر ۱۵ باشد، ضلع کوچک‌تر چقدر است؟

۵ (۱)

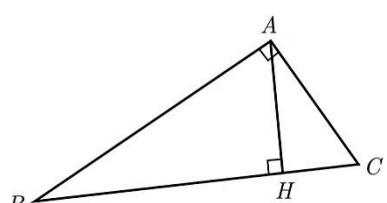
۷ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)



A

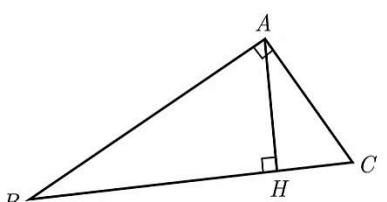


قضیه: فرض کنید مثلث  $\triangle ABC$  یک مثلث قائم‌الزاویه و  $AH$  ارتفاع



وارد بر وتر آن باشد، در آن صورت:

$$ABC \sim A'B'C' \sim A''B''C''$$



قضیه: فرض کنید مثلث  $\triangle ABC$  یک مثلث قائم‌الزاویه و  $AH$  ارتفاع

وارد بر وتر آن باشد، در آن صورت داریم:

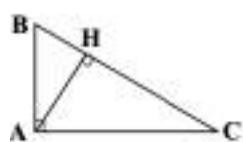
a)  $AB^2 = BH \times BC$  , b)  $AC^2 = CH \times BC$

c)  $AH^2 = BH \times HC$  , d)  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

e)  $AB \times AC = AH \times BC$

دانلود از سایت ریاضی سرا

(()) هر چیز در زندگی بهایی دارد، این آن چیزی است که هیزارزین هیکوشند بیاموزند. ( ))



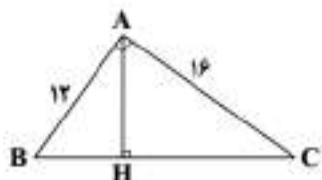
تست: ۲۶ - در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اگر  $AB = 4$  و  $AC = 12$ ، حاصل  $\frac{CH}{BH}$  کدام است؟

۹/۲

۸/۱

 $\sqrt{3}/4$ 

۷/۴



تست: ۲۷ - در شکل زیر، طول ارتفاع AH چقدر است؟

۴/۱ (۱)

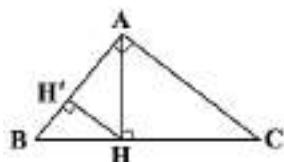
۹/۶ (۲)

۱۰/۴ (۳)

۱۰/۴ (۴)



تست: ۲۸ - در شکل زیر داریم  $AB = 8$  و  $AC = 6$ . مقدار  $BH'$  چقدر است؟



۳/۶ (۱)

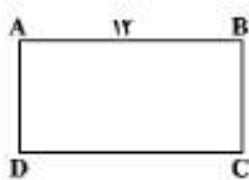
۷/۴ (۲)

۷/۴ (۳)

۷/۱۶ (۴)



تست: ۲۹ - شکل رویه روم مستطیلی به طول ۱۲ است. از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم و با این عمود را H می‌نامیم. اگر طول BH ۱۱ باشد، اندازه DH چقدر است؟



۷/۴

 $\frac{24}{11}$  (۱) $\frac{22}{11}$  (۲) $\frac{21}{11}$  (۳)

دو یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه وتر و ارتفاع وارد بر آن به ترتیب از راست به چه ۴ و ۱ سانتی‌متر است. طول پاره خط بزرگتری که ارتفاع روی وتر جدا می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

 $2 + \sqrt{3}$  (۱) $2 - \sqrt{3}$  (۲) $2 + \sqrt{3}$  (۳) $2 - \sqrt{3}$  (۴)

- تست ۳۱: از رأس A در مستطیل ABCD، عمود AH را بر قطر BD رسم می‌کنیم. اگر  $AD = 5$  و  $AB = 12$  باشد، نسبت مساحت مستطیل به مساحت  $\triangle ABH$  چندراست؟

۱۷/۵۲ (۴)

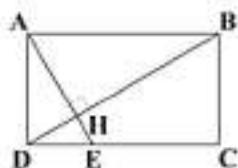
۱۷/۵۱ (۳)

۱۷/۵۲ (۲)

۱۷/۵ (۱)



- تست ۳۲: ابعاد مستطیل ABCD،  $2\sqrt{3}$  و ۲ است. اگر از A به قطر BD عمود کنیم و امتداد دهیم، خالع DC را در E قطع می‌کنند. اندازه‌ی HE چندراست؟



$\sqrt{3}$  (۱)

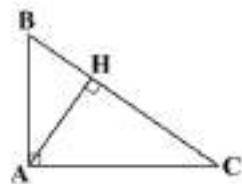
$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)

$\sqrt{3}$  (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)



- تست ۳۳: در شکل رو به رو اگر  $CH = 4BH$  و مساحت مثلث ACH برابر ۲۶ باشد، AB کدام است؟



۴۸ (۱)

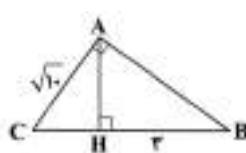
۵۴ (۲)

۵۵ (۳)

۶۶ (۴)



- تست ۳۴: با توجه به شکل رو به رو، طول AH کدام است؟



$\sqrt{5}$  (۱)

$\sqrt{8}$  (۲)

$\sqrt{5}$  (۳)

$\sqrt{7}$  (۴)



۱. اگر  $\pi < x < \frac{\pi}{4}$  باشد، حاصل  $\sqrt{1 + \tan^2 x} (\sin \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$  کدام است؟

۲.  $-0.05x$  (۱)  $-\sin x$  (۲)  $0.05x$  (۳)  $\sin x$  (۴)

سرعت یک قایق موتوری، در آب را که  $15^\circ$  متر در دقیقه است این قایق فاصله  $120^\circ$  متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت  $\Delta$  دقیقه است سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟

۳.  $12$  (۱)  $20$  (۲)  $18$  (۳)  $10$  (۴)

۴. معینووجه جواب نامعادله  $\frac{Tx - T}{x+1} < 1$  بـ کدام حالت است؟

۵.  $x < -T$  (۱)  $x > T$  (۲)  $R = [-T, T]$  (۳)  $R = (-\infty, T]$  (۴)

کل فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طبقه، هم‌تواند دسته گل‌های منابع درست گشته به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۶.  $188$  (۱)  $107$  (۲)  $145$  (۳)  $122$  (۴)

۷. اگر  $T = 2$  باشد، عدد  $\frac{a+1}{3}$  کدام است؟

۸.  $T/5$  (۱)  $T/2$  (۲)  $1/2$  (۳)  $1/5$  (۴)

در یک دوزنکه، پاره‌حذلی که مسطحهای دوساق را بهم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و  $T$  تقسیم می‌کند.

نسبت فاصله‌های آن دوزنکه کدام است؟

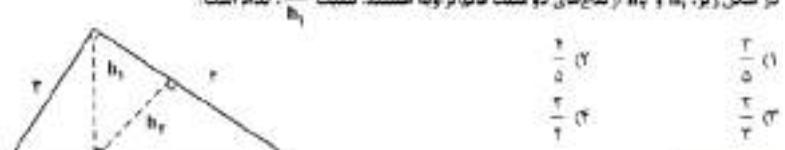
۹.  $\frac{T}{5}$  (۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)

در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اضلاع قائم  $AC = 6$  و  $AB = 2\sqrt{5}$  و میانه AM رسم شده است.

مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

۱۰.  $18$  (۱)  $15$  (۲)  $12$  (۳)  $10$  (۴)

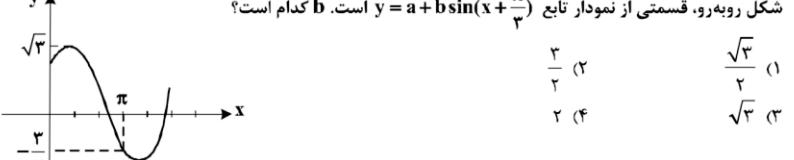
در شکل زیر،  $b_1$  و  $b_2$  از اندکهای دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت  $\frac{b_2}{b_1}$  کدام است؟



۱۱. حاصل عبارت  $\sin(\frac{17\pi}{3})\cos(-\frac{17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4})\sin(-\frac{11\pi}{6})$  کدام است؟

۱۲.  $\frac{1}{2}$  (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴)

۱۳. شکل رویه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$  است. اگر  $b$  کدام است؟



۱۴. اگر  $\log_A(9x+1) = \left(\frac{125}{8}\right)^x$  باشد،  $(a/x)$  کدام است؟

۱۵.  $\frac{3}{2}$  (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $2$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)

۱۶. شکل رویه‌رو، نمودار تابع  $y = \log_U U(x)$  است.  $U(x)$  کدام است؟



۱۷. به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{a+x^3}{|x+2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$  فقط از چپ پیوسته است؟

۱۸.  $12$  (۱)  $6$  (۲)  $-6$  (۳)  $-12$  (۴)

۱۹. احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول  $7/5$  و در آزمون دوم  $6/5$  است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال

موفقیت او در آزمون دوم  $8/7$  است. با کدام احتمال، لائق در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۲۰.  $0.84$  (۱)  $0.76$  (۲)  $0.74$  (۳)  $0.72$  (۴)

۲۱. در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند، میانگین نمرات مسئولیت‌بذری و واریانس در گروه اول به ترتیب  $80$  و

$25$  و در گروه دوم  $72$  و  $16$  می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

۲۲. اظهار نظر نمی‌توان کرد. (۱) گروه اول (۲) گروه دوم (۳) یکسان (۴)